

Wolfgang Tschirk

MATHE – Matura
Band 1: AHS

Grundlagen für
allgemeinbildende höhere Schulen

*(Inhaltsverzeichnis und Sachregister;
und dazwischen zum Probelesen
das Kapitel "Kurvendiskussionen")*

Dieses Skriptum soll Schülerinnen und Schülern bei ihrer Maturavorbereitung helfen, egal, ob sie Mathematik mögen oder nicht. Deshalb ist der Stoff auf das Wichtigste beschränkt, dieses wird ausführlich erklärt und mit vollständig gerechneten Beispielen illustriert. Ergebnis: die Grundlagen der Mathematik für allgemeinbildende höhere Schulen in kompakter Form. Für die Matura an berufsbildenden Schulen der Wirtschaft und der Technik gibt es jeweils einen Ergänzungsband.

Ich wünsche Ihnen/dir viel Erfolg!
Wolfgang Tschirk

MATHE – Matura

Band 1: AHS Grundlagen für allgemeinbildende höhere Schulen
Band 2: HAK Ergänzungen für berufsbildende höhere Schulen der Wirtschaft
Band 3: HTL Ergänzungen für berufsbildende höhere Schulen der Technik

3. Auflage 2011-06-01
© 2009, 2010, 2011
Mag. Wolfgang Tschirk
Mathematik und Physik für Schüler und Studenten
Wien, Österreich
www.mathecampus.at

Inhaltsverzeichnis

1	ZAHLEN UND RECHENREGELN	4
1.1	Die wichtigsten Zahlenarten	4
1.2	Weitere Zahlenarten	4
1.3	Rechnen mit Zahlen	5
1.4	Rechnen mit Brüchen	5
1.5	Rechnen mit Potenzen	6
1.5.1	Rechnen mit Potenzen – leicht erklärt	6
1.5.2	Rechnen mit Potenzen – zusammengefasst	8
1.6	Rechnen mit Wurzeln	9
1.7	Rechnen mit Binomen	9
1.8	Rechnen mit Logarithmen	10
2	POLYNOME UND GLEICHUNGEN	11
2.1	Polynome	11
2.2	Einiges über Gleichungen	11
2.3	Lineare Gleichungen	12
2.4	Quadratische Gleichungen	12
2.5	Gleichungen höheren Grades	14
2.5.1	Es kommt nur die höchste Potenz vor	14
2.5.2	Man kann eine Potenz herausheben	14
2.5.3	Man kann eine Potenz durch eine Variable ersetzen	14
2.5.4	Man kennt eine Nullstelle	15
2.6	Lineare Gleichungssysteme	16
2.6.1	Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme	16
2.6.2	Lösen linearer Gleichungssysteme	18
2.7	Nichtlineare Gleichungssysteme	18
3	TRIGONOMETRIE	19
3.1	Winkelfunktionen	19
3.2	Rechtwinkelige Dreiecke	19
3.3	Beliebige Dreiecke	20
3.4	Vielecke	20
3.5	Beispiel: Vermessungsaufgabe	21
3.5.1	Lösung mit schrittweiser Berechnung	21
3.5.2	Lösung mit Gleichungssystem	22
3.6	Winkelfunktionen am Einheitskreis	22
3.7	Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen	23
4	VEKTOREN	24
4.1	Punkte und Vektoren	24
4.2	Rechnen mit Vektoren – leicht erklärt	25
4.3	Rechnen mit Vektoren – zusammengefasst	27
4.4	Normalvektoren in der Ebene	30
4.5	Normalvektoren im Raum	30
4.6	Beispiel: Parallelogramm	31

5	GERADEN UND EBENEN	32
5.1	Geraden in der Ebene	32
5.1.1	Gerade in Parameterform	32
5.1.2	Gerade in Normalvektorform	33
5.1.3	Gerade in Hauptform	34
5.1.4	Lage zweier Geraden zueinander	34
5.2	Beispiel: Dreieck	35
5.3	Geraden und Ebenen im Raum	37
5.3.1	Gerade im Raum	37
5.3.2	Ebene in Parameterform	38
5.3.3	Ebene in Normalvektorform	39
5.3.4	Lage von Geraden und Ebenen zueinander	39
5.4	Beispiel: Pyramide	40
6	KEGELSCHNITTE	42
6.1	Kreis	42
6.1.1	Kreisgleichungen	42
6.1.2	Tangenten an einen Kreis	42
6.1.3	Beispiel: Kreis	43
6.2	Ellipse, Hyperbel, Parabel	45
6.2.1	Ellipsen-, Hyperbel- und Parabelgleichungen	45
6.2.2	Tangenten an Ellipse, Hyperbel und Parabel	45
6.2.3	Beispiel: Hyperbel	46
7	FOLGEN UND REIHEN	47
7.1	Folgen	47
7.2	Grenzwert von Folgen	48
7.3	Rechnen mit Grenzwerten	48
7.4	Reihen	49
7.5	Arithmetische Folgen und Reihen	49
7.6	Geometrische Folgen und Reihen	50
8	FUNKTIONEN	51
8.1	Reelle Funktionen	51
8.2	Graph einer Funktion	51
8.3	Nullstellen, Extremstellen, Wendepunkte, Monotonie	52
8.4	Rechnen mit Funktionen	53
9	EXPONENTIALFUNKTIONEN	54
9.1	Exponentielle Zunahme (Wachstum)	54
9.2	Beispiel: Bevölkerungswachstum	55
9.3	Exponentielle Abnahme (Zerfall)	56
9.4	Beispiel: radioaktiver Zerfall	57
9.5	Alternative Formulierung der Exponentialgesetze	58
10	DIFFERENTIALRECHNUNG	59
10.1	Steigung der Tangente	59
10.2	Erste Ableitung	59
10.3	Ableitungsregeln	60

10.4	Höhere Ableitungen	61
10.5	Extremwertaufgaben	62
11	INTEGRALRECHNUNG	63
11.1	Fläche unter dem Graphen	63
11.2	Stammfunktion	63
11.3	Integrationsregeln	64
11.4	Weitere Anwendungen des Integrals	66
12	KURVENDISKUSSIONEN	67
12.1	Was ist eine Kurvendiskussion?	67
12.2	Bestimmen der Eigenschaften einer Funktion	68
12.2.1	Nullstellen	68
12.2.2	Extremstellen	68
12.2.3	Wendepunkte	69
12.2.4	Wendetangenten	69
12.2.5	Skizze	70
12.2.6	Monotonie-Intervalle	70
12.2.7	Fläche	70
12.3	Bestimmen des Funktionsausdrucks aus den Eigenschaften	70
12.3.1	Unbestimmter Ansatz und Ableitungen	70
12.3.2	Funktionsausdruck	71
12.3.3	Skizze	71
13	BESCHREIBENDE STATISTIK	72
13.1	Beschreibung einer Größe	72
13.2	Beschreibung des Zusammenhanges zweier Größen	73
14	WAHRSCHEINLICHKEIT	75
14.1	Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis	75
14.2	Bedingte Wahrscheinlichkeit	76
14.3	Zufallsexperimente	76
14.3.1	Ziehen ohne Zurücklegen	76
14.3.2	Ziehen mit Zurücklegen	78
14.4	Binomialverteilung	79
14.5	Normalverteilung	81
14.6	Näherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung	84
14.6.1	Einfache Näherung	84
14.6.2	Näherung mit Stetigkeitskorrektur	85
15	SACHREGISTER	86

12 KURVENDISKUSSIONEN

12.1 Was ist eine Kurvendiskussion?

Unter einer Kurvendiskussion versteht man die Untersuchung einer Funktion. Dabei gibt es zwei Grundaufgaben:

- 1) Gegeben ist der Funktionsausdruck, gesucht sind Eigenschaften der Funktion.
- 2) Gegeben sind Eigenschaften der Funktion, gesucht ist der Funktionsausdruck.

Wesentliche Eigenschaften einer Funktion $y = f(x)$ sind:

Nullstellen: jene Stellen, wo y den Wert null annimmt. Für Nullstellen gilt daher $f(x) = 0$.

Extremstellen: Hoch- und Tiefpunkte (lokale Maxima und Minima). An Extremstellen hat der Funktionsgraph horizontale Tangenten, also die Steigung null. Für Extremstellen gilt daher $f'(x) = 0$. Gilt zusätzlich $f''(x) < 0$, dann liegt ein Hochpunkt vor, bei $f''(x) > 0$ ein Tiefpunkt. Ist hingegen $f''(x) = 0$, dann hängt die Art des Punktes von den höheren Ableitungen ab; oft handelt es sich um einen Horizontalwendepunkt (auch Sattelpunkt, Terrassenpunkt oder Treppenknoten genannt).

Wendepunkte: jene Punkte, an denen sich die Krümmungsrichtung des Graphen ändert. Dort hat die Steigung einen Extremwert. Für Wendepunkte gilt daher $f''(x) = 0$. Ist zusätzlich $f'''(x) \neq 0$, so liegt sicher ein Wendepunkt vor. Falls $f'''(x) = 0$, dann sagen erst die höheren Ableitungen, ob es sich um einen Wendepunkt handelt.

Monotonie-Intervalle: Abschnitte auf der x -Achse, in denen das Vorzeichen von $f'(x)$ gleich bleibt.

Tangenten: Gerade, die den Graphen berühren. Tangenten haben mit dem Graphen (zumindest) einen Punkt gemeinsam und in diesem Punkt dieselbe Steigung wie der Graph. Handelt es sich bei dem Punkt um einen Wendepunkt, so spricht man von einer Wendetangente (obwohl gerade diese den Graphen nicht im wörtlichen Sinn berührt, sondern schneidet).

Flächen zwischen dem Graphen und der x -Achse oder Flächen ausgewählter Abschnitte.

Symmetrie zur y -Achse: Ist der Graph symmetrisch zur y -Achse, dann gilt $f(x) = f(-x)$ für jede Zahl x aus der Definitionsmenge. Gerade Potenzen erfüllen diese Beziehung, ungerade nicht. Handelt es sich bei $f(x)$ um ein Polynom, dann hat dieses nur gerade Potenzen; die Koeffizienten aller ungeraden Potenzen sind null.

Symmetrie zum Ursprung: Ist der Graph symmetrisch zum Ursprung $(0|0)$, dann gilt $f(x) = -f(-x)$ für jede Zahl x aus der Definitionsmenge. Ungerade Potenzen erfüllen diese Beziehung, gerade nicht. Handelt es sich bei $f(x)$ um ein Polynom, dann hat dieses nur ungerade Potenzen; die Koeffizienten aller geraden Potenzen sind null.

12.2 Bestimmen der Eigenschaften einer Funktion

Beispiel: Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4.$$

Gesucht sind alle Nullstellen, Extremstellen, Wendepunkte, Wendetangenten und Monotonieintervalle sowie die Fläche zwischen dem Graphen und der x -Achse.

Da wir die Ableitungen der Funktion häufig benötigen, ermitteln wir sie gleich zu Beginn:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x,$$

$$f''(x) = 6x - 6,$$

$$f'''(x) = 6.$$

Nun werden wir die Eigenschaften suchen und eine Skizze anfertigen.

12.2.1 Nullstellen

Wir setzen $f(x) = 0$ und lösen die Gleichung. So erhalten wir alle Werte von x , für die $y = 0$ ist; das sind die x -Werte (x -Koordinaten) der Nullstellen. Hinweise zum Lösen dieser Gleichung und der noch folgenden gibt Kapitel 2. Die erste Nullstelle finden wir durch Probieren; die anderen bekommen wir aus der quadratischen Gleichung nach Polynomdivision:

$$x^3 - 3x^2 + 4 = 0,$$

$$x_1 = -1.$$

$$(x^3 - 3x^2 + 4) : (x + 1) = 0,$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0,$$

$$x_{23} = 2 \pm \sqrt{2^2 - 4},$$

$$x_2 = x_3 = 2.$$

Die Gleichung $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ hat zwei verschiedene Lösungen; die dritte Lösung wäre identisch mit der zweiten und kann ignoriert werden.

Die Funktion hat also zwei Nullstellen mit den x -Werten $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$. Die zugehörigen y -Werte ermittelt man durch Einsetzen der x -Werte in $f(x)$; bei Nullstellen können wir uns das ersparen, da die y -Werte null sind. Die Nullstellen sind daher:

$$N_1 = (-1 | 0),$$

$$N_2 = (2 | 0).$$

12.2.2 Extremstellen

Wir setzen $f'(x) = 0$ und lösen die Gleichung. So erhalten wir die x -Koordinaten aller Punkte, an denen der Graph horizontale Tangenten hat. Unter diesen Punkten müssen sich alle Extremstellen finden.

$$3x^2 - 6x = 0,$$

$$3x(x - 2) = 0,$$

$$x_1 = 0,$$

$$x_2 = 2.$$

Es kommen also zwei Punkte als Extremstellen in Betracht; deren y -Koordinaten sind die Funktionswerte der x -Koordinaten:

$$\begin{aligned}f(0) &= 4, \\f(2) &= 0.\end{aligned}$$

Nun prüfen wir für jeden der beiden Punkte, ob es sich um eine Extremstelle handelt und, wenn ja, um welche:

$$\begin{aligned}f''(0) &= -6 < 0, \\f''(2) &= 6 > 0.\end{aligned}$$

Der Punkt mit der x -Koordinate 0 ist also ein Hochpunkt, jener mit der x -Koordinate 2 ein Tiefpunkt:

$$\begin{aligned}H &= (0 \mid 4), \\T &= (2 \mid 0).\end{aligned}$$

12.2.3 Wendepunkte

Wir setzen $f''(x) = 0$, lösen die Gleichung und erhalten so die x -Koordinaten aller Punkte, die als Wendepunkte in Frage kommen:

$$\begin{aligned}6x - 6 &= 0, \\x &= 1.\end{aligned}$$

Es gibt also einen möglichen Wendepunkt; seine y -Koordinate ergibt sich aus der Funktion:

$$f(1) = 2.$$

Nun prüfen wir, ob es sich wirklich um einen Wendepunkt handelt:

$$f'''(x) = 6 \neq 0.$$

Unabhängig von x ist $f'''(x) \neq 0$. Der Punkt ist somit ein Wendepunkt:

$$W = (1 \mid 2).$$

12.2.4 Wendetangenten

Da der Graph nur einen Wendepunkt W hat, gibt es nur eine Wendetangente. Wir schreiben ihre Gleichung in der Form

$$y = kx + d$$

und bestimmen k und d .

k ist gleich der Ableitung der Funktion am Wendepunkt:

$$k = f'(1) = -3.$$

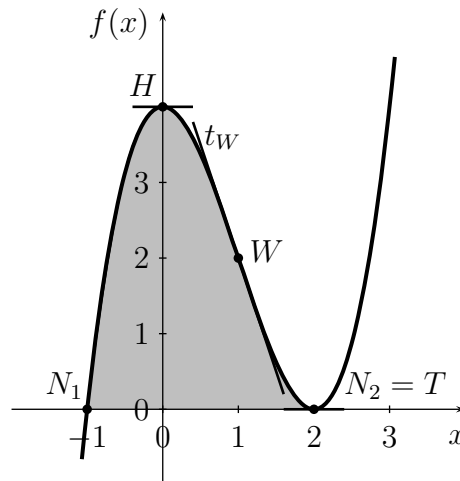
Da W auf der Wendetangente liegt, erfüllen die Koordinaten von W deren Gleichung. Daraus ergibt sich d :

$$\begin{aligned}2 &= (-3) \cdot 1 + d, \\d &= 5.\end{aligned}$$

Die Gleichung der Wendetangente lautet also:

$$y = -3x + 5.$$

12.2.5 Skizze



Graph von $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. N_1, N_2 : Nullstellen; H : Hochpunkt; T : Tiefpunkt; W : Wendepunkt; t_W : Wendetangente; die gesuchte Fläche ist grau hinterlegt.

12.2.6 Monotonie-Intervalle

Die Monotonie-Intervalle ersehen wir aus der Skizze: Links von H ist f streng monoton steigend, zwischen H und T streng monoton fallend, rechts von T streng monoton steigend.

$$f(x) \text{ ist } \begin{cases} \text{streng monoton steigend für } x < 0, \\ \text{streng monoton fallend für } 0 < x < 2, \\ \text{streng monoton steigend für } x > 2. \end{cases}$$

12.2.7 Fläche

Die Fläche zwischen dem Graphen und der x -Achse ist das bestimmte Integral zwischen den beiden Nullstellen:

$$A = \int_{-1}^2 (x^3 - 3x^2 + 4) dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 4x \right]_{-1}^2 = 6.75.$$

12.3 Bestimmen des Funktionsausdrucks aus den Eigenschaften

Beispiel: Eine Polynomfunktion vierten Grades hat im Ursprung einen Wendepunkt mit der x -Achse als Tangente; ein weiterer Wendepunkt ist $(1|-1)$. Gesucht ist der Funktionsausdruck.

12.3.1 Unbestimmter Ansatz und Ableitungen

Wir schreiben die Funktion und ihre Ableitungen mit unbestimmten Koeffizienten a, b, \dots an:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, \\ f'(x) &= 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d, \\ f''(x) &= 12ax^2 + 6bx + 2c. \end{aligned}$$

Der Funktionsausdruck ist bestimmt, sobald die Werte von a, b, c, d und e gefunden sind.

12.3.2 Funktionsausdruck

Die Angabe liefert folgende Hinweise:

Der Punkt $(0|0)$, der Ursprung, liegt auf dem Graphen; bei $x = 0$ ist also $f(x) = 0$.

Der Punkt $(0|0)$ ist ein Wendepunkt; bei $x = 0$ ist also $f''(x) = 0$.

Der Punkt $(0|0)$ hat eine horizontale Tangente; bei $x = 0$ ist also $f'(x) = 0$.

Der Punkt $(1|-1)$ liegt auf dem Graphen; bei $x = 1$ ist also $f(x) = -1$.

Der Punkt $(1|-1)$ ist ein Wendepunkt; bei $x = 1$ ist also $f''(x) = 0$.

Diese Hinweise führen zu einem linearen Gleichungssystem für die Unbekannten a, b, c, d, e :

$$\begin{aligned} f(0) = 0 &\longrightarrow e = 0, \\ f''(0) = 0 &\longrightarrow 2c = 0, \\ f'(0) = 0 &\longrightarrow d = 0, \\ f(1) = -1 &\longrightarrow a + b + c + d + e = -1, \\ f''(1) = 0 &\longrightarrow 12a + 6b + 2c = 0. \end{aligned}$$

Da $c = d = e = 0$, bleibt das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} a + b &= -1, \\ 12a + 6b &= 0 \end{aligned}$$

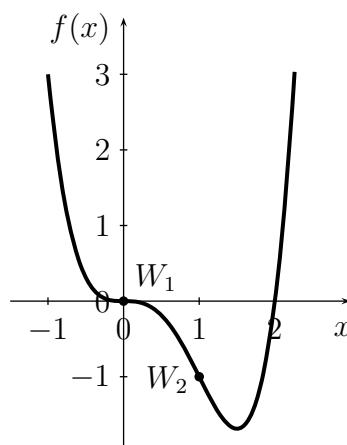
übrig. Es hat die Lösung:

$$\begin{aligned} a &= 1, \\ b &= -2. \end{aligned}$$

Die gesuchte Funktion ist daher:

$$f(x) = x^4 - 2x^3.$$

12.3.3 Skizze



Graph von $f(x) = x^4 - 2x^3$. W_1, W_2 : die Wendepunkte aus der Angabe.

15 SACHREGISTER

A

Ableitung **59, 60, 61**, 62, 63, 67, 68, **70**
 Abnahme, exponentielle 54, **56, 57, 58**
 –, Halbwertszeit 56, 57, 58
 Abstand zwischen
 – Ebene und Punkt 40
 – Ebenen 40
 – Gerade und Punkt 35
 – Geraden 35
 – Punkten 26, 29
 ähnliche Dreiecke 23
 algebraische Gleichung 12
 analytische Geometrie 24, 54
 Ankathete 19
 Ansatz, unbestimmter **70**
 Arcusfunktionen 19
 arithmetische
 – Folge **49**
 – Reihe **49**
 arithmetisches Mittel 72
 Assoziativgesetz
 – der Addition 5, 27
 – der Multiplikation 5
 Ausgleichsgerade 74

B

Basis einer Potenz 6, 10
 Bayes, Satz von 76
 bedingte Wahrscheinlichkeit **76**
 Berührbedingung
 – der Ellipse 45
 – der Hyperbel 45
 – des Kreises 43
 – der Parabel 45
 beschränkte Folge 47
 beschreibende Statistik **72**
 bestimmtes Integral 63, 64, 70
 Betrag eines Vektors 24, 25, 26, 28
 Binom **9**
 Binomialverteilung **79, 80, 81, 84**
 Bogenlänge 66
 Brennpunkt der Parabel 45
 Bruch 4, **5, 6**
 – erweitern 6
 – kürzen 6
 –, Nenner 5, 6
 –, Zähler 5, 6

C

Cosinus 19, 22
 Cosinusfunktion 60, 65
 Cosinussatz 20
 Cotangens 19

D

Definitionsbereich 51, 53, 67
 Definitionsmenge 51, 53, 67
 dekadischer Logarithmus 10
 Determinante 17
 Differential 65
 Differentialquotient 60, 65
 Differentialrechnung **59, 60**
 –, Grenzwert 60
 differenzierbare Funktion 61
 differenzieren 60, 61, 64, 65
 –, Kettenregel 61, 65
 –, Produktregel 61, 65
 –, Quotientenregel 61
 Dimension 24, 26, 27, 30
 diskrete
 – Verteilung 81, 85
 – Zufallsvariable 81
 Diskriminante 12, 13
 Distributivgesetz 5
 divergente
 – Folge 48
 – Reihe 49
 Doppelbruch 6
 Drehkörper 66
 dreidimensionaler Raum 24, 27, 30, 37
 Dreieck **19, 20**, 21, 23, **35, 36, 37**
 –, beliebiges **20**
 –, gleichschenkeliges 20
 –, gleichseitiges 20
 –, Höhe 36
 –, Höhenschnittpunkt 35, 36
 –, rechtwinkeliges **19, 20**
 –, Schwerpunkt 35, 36
 –, Seitenlängen 35, 37
 –, Seitensymmetralen 36
 –, Umkreismittelpunkt 35, 36
 –, Umkreisradius 35, 37
 –, Winkel 19, 20, 21, 35, 37
 Dreiecke, ähnliche 23
 dualer Logarithmus 10

E

Ebene 24, **30, 32, 34, 37, 38, 39, 40, 41, 42**
 –, Abstand zu einem Punkt 40
 –, Normalvektorform **39, 41**

- , Parameterform **38**
- , Punkt-Richtungs-Form 38
- Ebenen 40
- , Abstand zwischen 40
- , parallele 40
- , Winkel zwischen 40
- Einheitskreis **22, 23**
- Einheitsvektor 25, 26, 28, 35, 40
- Ellipse 42, **45**
- , Berührbedingung 45
- , Halbachse 45
- , Hauptlage 45
- , Tangente **45**
- endliche
 - Folge 47
 - Reihe 49
- Ereignis **75, 76**
- , Gegenteil 75
- , sicheres 75
- , unmögliches 75
- , Wahrscheinlichkeit für ein **75**
- , zusammengesetztes 75
- Ereignisse 75, 76
- , einander ausschließende 75
- , voneinander
 - , – abhängige 76
 - , – unabhängige 75
- erste
 - Ableitung **59, 60, 61, 62, 63, 67, 68, 70**
 - Mediane 53
- Erwartungswert 79, 81, 83, 84
- Erweitern eines Bruches 6
- eulersche Gerade 35, 37
- Exponent 6, 7, 8, 10, 11, 54, 56
- Exponentialfunktion **54, 60, 64**
- exponentieller Zerfall 54, **56, 57, 58**
- , Halbwertszeit 56, 57, 58
- exponentielles Wachstum **54, 55, 56, 57, 58**
- , Verdoppelungszeit 54, 55, 56, 58
- Extremstelle **52, 59, 67, 68, 69**
- Extremwert 59
- Extremwertaufgabe **62**

- F**
- Fälle in der Wahrscheinlichkeit 75
- Fläche unter dem Graphen **63, 64, 67, 68, 70**
- Folge **47, 48, 49, 50**
- , arithmetische **49**
- , beschränkte 47
- , divergente 48
- , endliche 47
- , geometrische **50**
- , Grenzwert **48**
- , konvergente 48
- , monoton
 - , – fallende 47
 - , – wachsende 47
- , obere Schranke 47
- , streng monoton
 - , – fallende 47
 - , – wachsende 47
- , unendliche 47
- , untere Schranke 47
- , von Partialsummen 49
- Funktion **51, 52, 53, 54, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 67, 68, 69, 70, 71, 74**
- , Ableitung **59, 60, 61, 62, 63, 67, 68, 70**
- , Cosinusfunktion 60, 65
- , Definitionsbereich 51, 53, 67
- , Definitionsmenge 51, 53, 67
- , differenzierbare 61
- , erste Ableitung **59, 60, 61, 62, 63, 67, 68, 70**
- , Exponentialfunktion **54, 60, 64**
- , Extremstelle **52, 59, 67, 68, 69**
- , Fläche unter dem Graphen **63, 64, 67, 68, 70**
- , Graph **51, 52, 53, 59, 61, 63, 64, 67, 68, 69, 70, 71**
- , Hochpunkt 52, 62, 67, 69, 70
- , Horizontalwendepunkt 67
- , konstante 60, 64
- , Krümmung 52, 61, 67
- , lineare 54, 74
- , Logarithmusfunktion 60
- , lokales
 - , – Maximum 52, 62, 67, 69, 70
 - , – Minimum 52, 62, 67, 69, 70
- , Maximum, lokales 52, 62, 67, 69, 70
- , Minimum, lokales 52, 62, 67, 69, 70
- , monoton
 - , – fallende 52, 70
 - , – steigende 52, 70
 - , – wachsende 52, 70
- , Monotonie **52, 67, 68, 70**
- , nirgends differenzierbare 61
- , Nullstelle **52, 67, 68, 70**
- , Polynomfunktion 70
- , Potenzfunktion 60, 64
- , quadratische 54
- , reelle **51**
- , Sattelpunkt 67
- , Sinusfunktion 60, 65
- , Stammfunktion **63, 64, 65**
- , streng monoton
 - , – fallende 52, 70
 - , – steigende 52, 70

–, – wachsende 52, 70
 –, Symmetrie 67
 –, Tangensfunktion 60, 65
 –, Tangente **59**, 61, 62, 67, 68, 69, 70, 71
 –, Terrassenpunkt 67
 –, Tiefpunkt 52, 62, 67, 69, 70
 –, Treppenkpunkt 67
 –, Umkehrfunktion 53
 –, Wendepunkt **52**, 59, 67, 68, **69**, 70, 71
 –, Wendetangente 67, 68, **69**, 70
 Funktionen, Verkettung 53
 Funktionsuntersuchung 67
 Funktionswert 51, 61

G

ganze Zahlen 4, 5, 6
 Gegenkathete 19
 Gegenteil eines Ereignisses 75
 Geometrie, analytische 24, 54
 geometrische
 – Folge **50**
 – Reihe **50**
 Gerade **32**, **33**, **34**, 35, 36, **37**, **39**, 40, 41, 42,
 43, 46, 53, 54, 67
 –, Abstand zu einem Punkt 35
 –, eulersche 35, 37
 –, Hauptform **34**
 –, Normalvektorform **33**, 34, 36, 37
 –, Parameterform **32**, 37, 41
 –, Punkt-Richtungs-Form 32
 –, Steigung 34
 –, vertikale 34
 gerade
 – Potenz 7, 8, 14, 67
 – Zahlen 5
 Geraden **34**, 35, 39
 –, Abstand zwischen 35
 –, parallele 34, 39
 –, windschiefe 39
 –, Winkel zwischen 34, 39
 Gesamtheit 72, 73
 Gleichung **11**, 12, 13, **14**, 15, 16, 17, 18
 –, algebraische 12
 –, lineare **12**, 16, 17, 18
 –, quadratische **12**, 13, 15
 Gleichungssystem **16**, 17, **18**, 21, **22**, 32, 38,
 43, 44, 71
 –, Determinante 17
 –, Koeffizientenmatrix 17
 –, lineares **16**, 17, **18**, 38, 71
 –, nichtlineares **18**, 43, 44
 –, unterbestimmtes 16

–, widersprüchliches 17
 Grad eines Polynoms 11
 Graph einer Funktion **51**, 52, 53, 59, 61, **63**, 64,
 67, 68, 69, 70, 71
 Grenzwert
 – einer Folge **48**
 – einer Reihe 49, 50
 – in der Differentialrechnung 60
 – in der Integralrechnung 64
 günstiger Fall 75

H

Halbachse
 – der Ellipse 45
 – der Hyperbel 45, 46
 Halbwertszeit 56, 57, 58
 Hauptform der Geraden **34**
 Hauptlage
 – der Ellipse 45
 – der Hyperbel 45
 – der Parabel 45
 Hochpunkt 52, 62, 67, 69, 70
 Hochzahl 6, 7, 8, 10, 11, 54, 56
 Höhe des Dreiecks 36
 Höhenschnittpunkt des Dreiecks 35, 36
 horizontale Tangente 59, 62, 67, 68, 71
 Horizontalwendepunkt 67
 Hyperbel 42, **45**, **46**
 –, Berührbedingung 45
 –, Halbachse 45, 46
 –, Hauptlage 45
 –, Tangente **45**, 46
 hypergeometrische Verteilung 80, 81
 Hypotenuse 19, 20

I

inneres Produkt 25, 26, 28, 31, 33, 39
 Integral **63**, 64, **66**, 70
 –, bestimmtes 63, 64, 70
 –, unbestimmtes 64
 Integralrechnung **63**, 64, 66
 –, Bogenlänge 66
 –, Grenzwert 64
 –, Volumen eines Drehkörpers 66
 integrieren 64, 65
 – durch Substitution 65
 –, partiell 65
 irrationale Zahlen 4

K

Kegel 42
 Kegelschnitt **42**, 54

Kehrwert 6, 7, 8, 9
 Kettenregel des Differenzierens 61, 65
 Koeffizientenmatrix 17
 Kommutativgesetz
 – der Addition 5, 27
 – der Multiplikation 5
 – des Skalarproduktes 28
 komplexe Zahlen 4, 5, 13
 konstante Funktion 60, 64
 konvergente
 – Folge 48
 – Reihe 49, 50
 Koordinate 24, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34, 37,
 38, 39, 41, 44, 45, 46, 51, 68, 69
 Koordinatenachsen 24, 45
 Koordinatensystem 24, 42, 45, 51, 67, 70, 71
 –, Ursprung 24, 42, 45, 67, 70, 71
 Korrelationskoeffizient 73, 74
 Kosinus \rightarrow Cosinus
 Kotangens \rightarrow Cotangens
 Kovarianz 73
 Kreis 22, 23, 24, **42**, **43**, 44, 45
 –, Berührbedingung 43
 –, Mittelpunkt 42, 45
 –, Radius 22, 42, 45
 –, Tangente **42**, 43, 44
 Kreuzprodukt 30, 31, 39, 41
 Krümmung einer Funktion 52, 61, 67
 kubisches Polynom 11
 Kurvendiskussion **67**
 Kürzen eines Bruches 6

L

Länge
 – einer Strecke 26, 29
 – eines Vektors 24, 25, 26, 28
 laplacesche Wahrscheinlichkeit 75
 lineare
 – Funktion 54, 74
 – Gleichung **12**, 16, 17, 18
 – Regression 74
 lineares
 – Gleichungssystem **16**, 17, **18**, 38, 71
 – Polynom 11
 Linearkombination von Vektoren 38
 Logarithmus **10**
 –, dekadischer 10
 –, dualer 10
 –, natürlicher 10
 Logarithmusfunktion 60
 lokales
 – Maximum 52, 62, 67, 69, 70

– Minimum 52, 62, 67, 69, 70

M

Maximum einer Funktion 52, 62, 67, 69, 70
 Median 72, 73
 Mediane, erste 53
 Minimum einer Funktion 52, 62, 67, 69, 70
 Mittel, arithmetisches 72
 Mittelpunkt
 – eines Kreises 42, 45
 – einer Strecke 26, 29
 Mittelwert 72, 73
 Modalwert 72, 73
 monoton
 – fallende
 – – Folge 47
 – – Funktion 52, 70
 – steigende Funktion 52, 70
 – wachsende
 – – Folge 47
 – – Funktion 52, 70
 Monotonie einer Funktion **52**, 67, 68, **70**

N

natürliche Zahlen 4, 5
 natürlicher Logarithmus 10
 Nenner 5, 6
 nichtlineares Gleichungssystem **18**, 43, 44
 nichtrekursiv 49, 50
 nirgends differenzierbare Funktion 61
 normale Vektoren 26, 29
 Normalebene 37
 Normalvektor **30**, 33, 34, 35, 37, 39, 40, 41
 Normalvektorform
 – der Ebene **39**, 40
 – der Geraden **33**, 34, 36, 37
 Normalverteilung **81**, 82, 83, **84**, 85
 Nullstelle
 – einer Funktion **52**, 67, **68**, 70
 – eines Polynoms 11, 12, **15**
 Nullvektor 32

O

obere Schranke einer Folge 47
 orthogonale Vektoren 26, 29
 Ortsvektor 24, 26

P

Parabel 24, 42, **45**, 66
 –, Berührbedingung 45
 –, Brennpunkt 45
 –, Hauptlage 45

–, Parameter 45
 –, Tangente **45**
 parallele
 – Ebenen 40
 – Geraden 34, 39
 – Vektoren 26, 29, 31
 Parallelogramm **31**
 Parameter der Parabel 45
 Parameterform
 – der Ebene **38**
 – der Geraden **32**, 37, 41
 Partialsumme 49
 partiell integrieren 65
 Pfadwahrscheinlichkeit 76, 78
 Polynom **11**, 12, 15, 54, 67
 –, Grad 11
 –, kubisches 11
 –, lineares 11
 –, Nullstelle 11, 12, **15**
 –, quadratisches 11, 15
 Polynomdivision 15, 16, 68
 Polynomfunktion 70
 Polynomgleichung 12
 Potenz **6**, 7, **8**, 9, 10, 14, 67
 –, Basis 6, 10
 –, Exponent 6, 7, 8, 10, 11
 –, gerade 7, 8, 14, 67
 –, Hochzahl 6, 7, 8, 10, 11
 –, ungerade 7, 8, 14, 67
 –, Zehnerpotenz 10
 Potenzfunktion 60, 64
 Produktregel des Differenzierens 61, 65
 Punkt **24**, 26, 29, 32, 33, 34, 35, 38, 39, 40,
 41, 42, 43, 51, 52, 59, 67, 68, 69, 71
 –, Abstand zu einer
 –, – Ebene 40
 –, – Geraden 35
 Punkt-Richtungs-Form
 – der Ebene 38
 – der Geraden 32
 Pyramide **40**
 Pythagoras, Satz von 20, 23, 25, 42

Q

Quadrant 22
 Quadrat 20
 quadratische Gleichung **12**, 13, 15
 quadratisches Polynom 11, 15
 Quotientenregel des Differenzierens 61

R

Radius eines Kreises 22, 42, 45

rationale Zahlen 4, 5
 Raum 24, 27, **30**, **37**
 –, dreidimensionaler 24, 27, 30, 37
 –, zweidimensionaler 24, 27, 30
 Raute 20
 Rechteck 20
 rechtwinkeliges Dreieck **19**, 20
 reelle
 – Funktion **51**
 – Zahlen 4, 5, 13, 27, 51, 75, 81
 Regression 74
 Regressionsgerade 74
 Reihe **47**, **49**, **50**
 –, arithmetische **49**
 –, divergente 49
 –, endliche 49
 –, geometrische **50**
 –, Grenzwert 49, 50
 –, konvergente 49, 50
 –, Partialsumme 49
 –, Summe 49
 –, Teilsumme 49
 –, unendliche 49, 50
 rekursiv 49, 50
 Richtungsvektor 32, 34, 35, 38, 39, 40, 41

S

Sattelpunkt 67
 Satz
 – von Bayes 76
 – von Pythagoras 20, 23, 25, 42
 Schranke einer Folge 47
 Schwerpunkt des Dreiecks 35, 36
 Seitenlängen des Dreiecks 35, 37
 Seitensymmetralen des Dreiecks 36
 sicheres Ereignis 75
 Sinus 19, 20, 22, 23
 Sinusfunktion 60, 65
 Sinussatz 20
 Skalar 25
 Skalarprodukt 25, 26, 28, 31, 33, 39
 Spannweite 72, 73
 Stammfunktion **63**, 64, 65
 Standardabweichung 72, 73, 79, 81, 83, 84
 Standardnormalverteilung 81, 82, 83, 84, 85
 Statistik **72**, 73, 74
 –, Ausgleichsgerade 74
 –, beschreibende **72**
 –, Gesamtheit 72, 73
 –, Korrelationskoeffizient 73, 74
 –, Kovarianz 73
 –, Median 72, 73

–, Mittelwert 72, 73
 –, Modalwert 72, 73
 –, Regression 74
 –, Regressionsgerade 74
 –, Spannweite 72, 73
 –, Standardabweichung 72, 73
 –, Stichprobe 72, 73
 –, Varianz 72, 73
 –, Zentralwert 72
 Steigung
 – der Geraden 34
 – der Tangente **59**, 61, 62, 67, 69
 stetige
 – Verteilung 81, 85
 – Zufallsvariable 81
 Stetigkeitskorrektur **85**
 Stichprobe 72, 73
 Strecke 26, 29
 –, Länge 26, 29
 –, Mittelpunkt 26, 29
 streng monoton
 – fallende
 – – Folge 47
 – – Funktion 52, 70
 – steigende Funktion 52, 70
 – wachsende
 – – Folge 47
 – – Funktion 52, 70
 Substitution beim Integrieren 65
 Symmetrie eines Funktionsgraphen 67

T

Tangens 19, 22
 Tangensfunktion 60, 65
 Tangente **42**, 43, 44, **45**, 46, **59**, 61, 62, 67, 68, 69, 70, 71
 – an eine Ellipse **45**
 – an einen Funktionsgraphen **59**, 61, 62, 67, 68, 69, 70, 71
 – an eine Hyperbel **45**, 46
 – an einen Kreis **42**, 43, 44
 – an eine Parabel **45**
 –, horizontale 59, 62, 67, 68, 71
 –, Steigung **59**, 61, 62, 67, 69
 Terrassenpunkt 67
 Tiefpunkt 52, 62, 67, 69, 70
 Treppenpunkt 67
 Trigonometrie **19**, 54

U

Umkehrfunktion 53
 Umkreismittelpunkt des Dreiecks 35, 36

Umkreisradius des Dreiecks 35, 37
 unbestimmter Ansatz **70**
 unbestimmtes Integral 64
 unendliche
 – Folge 47
 – Reihe 49, 50
 ungerade
 – Potenz 7, 8, 14, 67
 – Zahlen 5
 unmögliches Ereignis 75
 unterbestimmtes Gleichungssystem 16
 untere Schranke einer Folge 47
 Ursprung des Koordinatensystems 24, 42, 45, 67, 70, 71

V

Varianz 72, 73
 Vektor **24**, **25**, 26, **27**, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41
 –, Betrag 24, 25, 26, 28
 –, Einheitsvektor 25, 26, 28, 35, 40
 –, Länge 24, 25, 26, 28
 –, Normalvektor **30**, 33, 34, 35, 37, 39, 40, 41
 –, Nullvektor 32
 –, Richtung 24
 –, Richtungsvektor 32, 34, 35, 38, 39, 40, 41
 Vektoren **24**, **25**, 26, **27**, 28, 29, 30, 31, 33, 38, 39, 41
 –, Linearkombination 38
 –, normale 26, 29
 –, orthogonale 26, 29
 –, parallele 26, 29, 31
 –, Skalarprodukt 25, 26, 28, 31, 33, 39
 –, Vektorprodukt 30, 31, 39, 41
 –, Winkel zwischen 25, 26, 28, 29, 31
 –, Winkelsymmetrale zwischen 26
 Vektorprodukt 30, 31, 39, 41
 Verdoppelungszeit 54, 55, 56, 58
 Verkettung von Funktionen 53
 Vermessungsaufgabe **21**
 Verteilung 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85
 Vieleck **20**
 Volumen eines Drehkörpers 66

W

Wachstum, exponentielles **54**, **55**, 56, 57, 58
 –, Verdoppelungszeit 54, 55, 56, 58
 Wahrscheinlichkeit **75**, **76**, 77, 78, 79, 80, 81, 83, 84, 85
 –, bedingte **76**
 –, Binomialverteilung **79**, 80, 81, **84**

- , diskrete
- , – Verteilung 81, 85
- , – Zufallsvariable 81
- , Erwartungswert 79, 81, 83, 84
- , Fälle 75
- für ein Ereignis **75**
- für das Gegenteil 75, 77, 78
- , günstiger Fall 75
- , hypergeometrische Verteilung 80, 81
- , laplacesche 75
- , Normalverteilung **81**, 82, 83, **84**, 85
- , Pfadwahrscheinlichkeit 76, 78
- , Standardabweichung 79, 81, 83, 84
- , Standardnormalverteilung 81, 82, 83, 84, 85
- , stetige
- , – Verteilung 81, 85
- , – Zufallsvariable 81
- , Stetigkeitskorrektur **85**
- , Verteilung 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85
- , Zufallsexperiment **76**, 79
- , Zufallsvariable 79, 81
- Wendepunkt **52**, 59, 67, 68, **69**, 70, 71
- Wendetangente 67, 68, **69**, 70
- Wertetabelle 51
- widersprüchliches Gleichungssystem 17
- windschiefe Geraden 39
- Winkel
- im Dreieck 19, 20, 21, 35, 37
- im Einheitskreis 22, 23
- zwischen
- – Ebenen 40
- – Gerade und Ebene 39, 40
- – Geraden 34, 39
- – Vektoren 25, 26, 28, 29, 31
- Winkelfunktion 19, 22, 23
- Winkelfunktionen **19**, **22**, **23**
- am Einheitskreis **22**
- , Beziehungen zwischen **23**
- im rechtwinkligen Dreieck 19
- , Umkehrung 19, 22
- Winkelsymmetrale zwischen Vektoren 26
- Wurzel **9**

Z

- Zahlen **4**, **5**, 6, 13, 27, 51, 75, 81
- , ganze 4, 5, 6
- , gerade 5
- , irrationale 4
- , komplexe 4, 5, 13
- , natürliche 4, 5
- , rationale 4, 5

- , reelle 4, 5, 13, 27, 51, 75, 81
- , ungerade 5
- Zähler 5, 6
- Zehnerlogarithmus 10
- Zehnerpotenz 10
- Zentralwert 72
- Zerfall, exponentieller 54, **56**, **57**, 58
- , Halbwertszeit 56, 57, 58
- Ziehen
- mit Zurücklegen **78**, 79
- ohne Zurücklegen **76**, 77, 79, 80
- Zufallsexperiment **76**, 79
- Zufallsvariable 79, 81
- Zunahme, exponentielle **54**, **55**, 56, 57, 58
- , Verdoppelungszeit 54, 55, 56, 58
- zusammengesetztes Ereignis 75
- zweidimensionaler Raum 24, 27, 30
- Zweierlogarithmus 10