Wolfgang Tschirk

MATHE – Matura
Band 2: HAK

Ergänzungen für
berufsbildende höhere Schulen der Wirtschaft

(Inhaltsverzeichnis und Sachregister;
und dazwischen zum Probelesen
das Kapitel "Finanzmathematik")

www.mathecampus.at

Dieses Skriptum soll Schülerinnen und Schülern berufsbildender höherer Schulen der Wirtschaft bei ihrer Maturavorbereitung helfen. Es enthält den Maturastoff, soweit er die Mathematik allgemeinbildender höherer Schulen übersteigt, und ergänzt somit den Band 1 dieser Reihe. Für die schließende Statistik gibt es ein eigenes Skriptum.

Ich wünsche Ihnen/dir viel Erfolg!
Wolfgang Tschirk

MATHE – Matura

Band 1: AHS Grundlagen für allgemeinbildende höhere Schulen
Band 2: HAK Ergänzungen für berufsbildende höhere Schulen der Wirtschaft
Band 3: HTL Ergänzungen für berufsbildende höhere Schulen der Technik

1. Auflage 2012-01-01

Mag. Wolfgang Tschirk
Mathematik und Physik für Schüler und Studenten
Wien, Österreich
www.mathecampus.at

Inhaltsverzeichnis

1 FINANZMATHEMATIK

1.1 Rechnen mit Prozenten

"Prozent" heißt "Hundertstel" (und "Promille" heißt "Tausendstel").

"Zwölf Prozent" ist also eine Schreibweise für "zwölf Hundertstel":

$$12\% = \frac{12}{100} = 0{,}12,$$

und "hundert Prozent" ist eine Schreibweise für "eins":

$$100\% = \frac{100}{100} = 1.$$

Zwölf Prozent von achtzig sind zwölf Hundertstel von achtzig:

$$12\% \text{ von } 80 = \frac{12}{100} \cdot 80 = 0{,}12 \cdot 80 = 9{,}60.$$

Eine *Vermehrung* um 12% bedeutet, dass 100% zu 112% werden; das entspricht einer Multiplikation des Ausgangswertes mit 1,12:

$$+\,12\% \;\widehat{=}\; \cdot\; 1{,}12.$$

Vermehrt man also 80 um 12%, so erhält man

$$80 + 12\% \text{ von } 80 = 80 \cdot 1{,}12 = 89,60.$$

Bei einer Vermehrung um 120% werden 100% zu 220%; das entspricht einer Multiplikation des Ausgangswertes mit 2,2:

$$+\,120\% \;\widehat{=}\; \cdot\; 2{,}2.$$

Bei einer *Verminderung* um 12% werden 100% zu 88%; das ist eine Multiplikation des Ausgangswertes mit 0,88:

$$-\,12\% \;\widehat{=}\; \cdot\; 0{,}88.$$

Der multiplikative Faktor r für eine Veränderung um p Prozent ergibt sich immer durch

$$r = 1 + \frac{p}{100}\,,$$

wie wir an den obigen Beispielen sehen:

$$\begin{aligned}
+\,12\% \quad &\longrightarrow \quad r = 1 + \frac{12}{100} = 1{,}12,\\
+\,120\% \quad &\longrightarrow \quad r = 1 + \frac{120}{100} = 2{,}2,\\
-\,12\% \quad &\longrightarrow \quad r = 1 - \frac{12}{100} = 0{,}88.
\end{aligned}$$

Aufeinander folgende prozentuelle Veränderungen entsprechen aufeinander folgenden Multiplikationen. Kommen zu einem Nettopreis von 80 € 20% Mehrwertsteuer und werden dann 3% Skonto abgezogen, so ist der Rechnungsbetrag

$$80 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}97 = 93{,}12.$$

Ob man *zuerst* die 20% aufschlägt und *danach* die 3% abzieht oder umgekehrt, ist egal, denn beide Wege führen zum selben Ergebnis:

$$80 \cdot 0{,}97 \cdot 1{,}2 = 93{,}12.$$

1.2 Zinsfuß, Zinssatz, einfache Zinsen und Zinseszinsen

Wird ein Kapital mit 3% pro Jahr verzinst, so nennt man

$$p = 3$$

den jährlichen *Zinsfuß* und

$$i = \frac{p}{100} = 0{,}03$$

den jährlichen *Zinssatz*. Üblich ist *nachschüssige* oder *dekursive* Verzinsung: Die Zinsen werden *am Ende* des Jahres bezahlt; wir betrachten daher nur diesen Fall. Beim Zinssatz i multipliziert sich ein Kapital jährlich mit dem Faktor $1 + i$. Aus einem Anfangskapital K_0 wird also nach einem Jahr ein Endkapital

$$K_1 = K_0(1 + i).$$

Beispiel 1.1 : *Aus einem Anfangskapital von 4.000 € ist nach einem Jahr ein Endkapital von 4.100 € geworden. Wie hoch sind Zinssatz i und Zinsfuß p?*

$$\begin{aligned} i &= \frac{K_1}{K_0} - 1 = \frac{4.100}{4.000} - 1 = 0{,}025 = 2{,}5\%, \\ p &= 100\,i = 2{,}5. \end{aligned}$$

❑

Ein Kapital kann über mehrere Jahre verzinst werden. Verzinst man immer nur das Anfangskapital, so spricht man von *einfachen Zinsen*. Rechnet man dagegen am Ende jedes Jahres die Zinsen zum Kapital hinzu und verzinst sie ab dann mit, handelt es sich um *Zinseszinsen*.

1.3 Einfache Zinsen

Bei einfachen Zinsen kommen über n Jahre ni Zinsen zum Anfangskapital hinzu:

$$K_n = K_0(1 + ni).$$

Beispiel 1.2 : *Ein Anfangskapital von 7.000 € wird über 3 Jahre mit 2% einfach verzinst. Wie hoch ist das Endkapital?*

$$K_3 = 7.000 \cdot (1 + 3 \cdot 0{,}02) = 7.420.$$

❑

Wird ein Kapital über weniger als ein Jahr verzinst, dann sind die Zinsen entsprechend geringer. Die Berechnung der Verzinsungsdauer ist gesetzlich geregelt und hängt davon ab, ob es sich um Spareinlagen, Girokonten oder anderes handelt. Bei Spareinlagen beispielsweise tut man so, als hätte jeder Monat 30 Tage und daher das Jahr 360; die weiteren Regeln lassen wir beiseite. Bei einer Verzinsungsdauer von t Tagen und einem Zinssatz i wird aus einem Anfangskapital K_0 ein Endkapital $K_{t/360}$ von

$$K_{t/360} = K_0 \left(1 + \frac{t}{360}\, i\right).$$

Beispiel 1.3 : *125.000 € werden über 80 Tage mit 4% verzinst. Wie hoch ist das Endkapital?*

$$K_{80/360} = 125.000 \cdot \left(1 + \frac{80}{360} \cdot 0{,}04\right) = 126.111{,}11.$$

❑

1.4 Zinseszinsen

Die *Zinsperiode* ist jener Zeitraum, nach dem die Zinsen zum Kapital hinzugerechnet und ab dann mitverzinst werden. Beträgt sie ein Jahr, nennt man die Verzinsung *ganzjährig*, beträgt sie weniger, nennt man sie *unterjährig*.

1.4.1 Ganzjährige Verzinsung

Aus dem Anfangskapital K_0 wird beim Zinssatz i nach 1, 2, 3, ..., n Jahren:

$$\begin{aligned} K_1 &= K_0(1+i), \\ K_2 &= K_1(1+i) = K_0(1+i)^2, \\ K_3 &= K_2(1+i) = K_0(1+i)^3, \\ &\dots \\ K_n &= K_0(1+i)^n. \end{aligned}$$

Beispiel 1.4 : *Wie wächst ein Kapital von anfänglich 10.000 € bei 4% einfachen Zinsen und bei 4% Zinseszinsen? Wie lang dauert es jeweils, bis es sich verdoppelt hat?*

Wir vergleichen die Kapitalentwicklung bei einfachen Zinsen (EZ) und Zinseszinsen (ZZ):

$$\begin{aligned} \text{EZ}: \quad & K_n = K_0(1+ni) = 10.000 \cdot (1 + n \cdot 0{,}04), \\ \text{ZZ}: \quad & K_n = K_0(1+i)^n = 10.000 \cdot (1 + 0{,}04)^n. \end{aligned}$$

n	K_n (EZ)	K_n (ZZ)
0	10.000,00	10.000,00
1	10.400,00	10.400,00
2	10.800,00	10.816,00
3	11.200,00	11.248,64
...	...	...
10	14.000,00	14.802,44
20	18.000,00	21.911,23
30	22.000,00	32.433,98

Nun ermitteln wir die Anzahl der Jahre bis zur Kapitalverdoppelung: jenes n, für das gilt:

$$K_n = K_0 \cdot 2.$$

Bei einfacher Verzinsung heißt das:

$$\begin{aligned} 1 + ni &= 2, \\ n &= \frac{1}{i} = \frac{1}{0{,}04} = 25; \end{aligned}$$

also verdoppelt sich das Kapital in 25 Jahren. Bei Zinseszinsen haben wir:

$$\begin{aligned} (1+i)^n &= 2, \\ n \ln(1+i) &= \ln 2, \\ n &= \frac{\ln 2}{\ln(1+i)} = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}04} = 17,67; \end{aligned}$$

also verdoppelt sich das Kapital in etwas weniger als 18 Jahren.

❑

1.4.2 Kapitalertragsteuer

Zinserträge werden im Allgemeinen besteuert. Bei Sparbüchern werden in Österreich am Ende jedes Jahres 25% der Zinsen als *Kapitalertragsteuer* (*KESt*) an das Finanzamt abgeführt. Die restlichen 75% bleiben dem Sparer; für ihn sieht es daher so aus, als wäre der Zinssatz nur 75% des tatsächlichen.

Beispiel 1.5 : *Wie wächst ein Kapital von anfänglich 10.000 € bei 4% Zinseszinsen ohne bzw. mit KESt? Wer gewinnt, wer verliert durch die KESt?*

Wir vergleichen die Kapitalentwicklung ohne und mit KESt:

$$\begin{aligned} \text{ohne}: \quad & K_n = K_0(1+i)^n = 10.000 \cdot (1+0{,}04)^n, \\ \text{mit}: \quad & K_n = K_0(1+0{,}75\,i)^n = 10.000 \cdot (1+0{,}03)^n. \end{aligned}$$

n	K_n (ohne)	K_n (mit)
0	10.000,00	10.000,00
1	10.400,00	10.300,00
2	10.816,00	10.609,00
3	11.248,64	10.927,27
...	...	...
10	14.802,44	13.439,16
20	21.911,23	18.061,11
30	32.433,98	24.272,62

Man könnte meinen, die KESt wäre ein Geschäft zwischen dem Staat und dem Sparer – der Staat gewinnt, der Sparer verliert, und der Bank ist es egal, weil sie die Zinsen so und so zahlen muss, nur eben zum Teil an den Staat. Das ist aber ein Irrtum. Denn der als KESt abgeführte Teil der Zinsen kommt nicht zum Kapital hinzu und steht der Bank nicht für Geschäfte zur Verfügung. Andererseits wird er in der Folge nicht mitverzinst und die Bank erspart sich Zinsen. Schauen wir uns die Berechnung nochmals an und ergänzen wir die Zinsen Z_n, die die Bank im Jahr n jeweils zahlt (hier 4% des Kapitals am Ende des Vorjahres):

n	Z_n (ohne)	K_n (ohne)	Z_n (mit)	K_n (mit)
0	0,00	10.000,00	0,00	10.000,00
1	400,00	10.400,00	400,00	10.300,00
2	416,00	10.816,00	412,00	10.609,00
3	432,64	11.248,64	424,36	10.927,27
...	...	...	...	...
10	569,32	14.802,44	521,91	13.439,16
20	842,74	21.911,23	701,40	18.061,11
30	1.247,46	32.433,98	942,63	24.272,62

Wir sehen: Je länger Geld auf einem Sparbuch liegt, umso stärker verringert die KESt das Kapitalwachstum und die Zinsen.

❑

1.4.3 Unterjährige Verzinsung

Bisher sind wir davon ausgegangen, dass genau einmal pro Jahr (p.a., per annum) Zinsen anfallen, und haben dies als ganzjährige Verzinsung bezeichnet. Fallen mehrmals pro Jahr Zinsen an, so sprechen wir von unterjähriger Verzinsung. Verzinst werden kann beispielsweise einmal pro Halbjahr oder Semester (p.s., also zweimal jährlich), einmal pro Vierteljahr oder Quartal (p.q., also viermal jährlich) oder einmal pro Monat (p.m., also zwölfmal jährlich). Der jeweilige Zinssatz wird nach der Anzahl der Zinsperioden pro Jahr benannt: i_2 bezeichnet den Semesterzinssatz, i_4 den Quartalszinssatz und i_{12} den Monatszinssatz.

Wird ein Anfangskapital K_0 m-mal pro Jahr mit dem Zinssatz i_m verzinst, so ist es nach einem Jahr auf

$$K_1 = K_0(1 + i_m)^m$$

angewachsen. Vergleichen wir dies mit der ganzjährigen Verzinsung:

$$K_1 = K_0(1 + i),$$

so sehen wir, dass die unterjährige Verzinsung den gleichen Effekt hat wie die ganzjährige mit einem Zinssatz i, sofern

$$1 + i = (1 + i_m)^m$$

gilt. Diesen passenden Zinssatz i nennen wir daher *Effektivzinssatz*; er ergibt sich zu

$$i = (1 + i_m)^m - 1.$$

Umgekehrt ergibt sich der unterjährige Zinssatz aus dem Effektivzinssatz:

$$i_m = \sqrt[m]{1 + i} - 1.$$

Vom Effektivzinssatz zu unterscheiden ist der *Nominalzinssatz*

$$i_{nom} = m\, i_m,$$

eine reine Hilfsgröße, die manchmal anstatt des unterjährigen Zinssatzes angegeben wird und aus der sich der unterjährige Zinssatz berechnen lässt:

$$i_m = \frac{i_{nom}}{m}\,.$$

Zinssätze, die zum gleichen Effektivzinssatz führen, heißen zueinander *konform*.

Beispiel 1.6 : *Gegeben sei ein Nominalzinssatz von 6% und vierteljährliche Verzinsung. Wie hoch sind der Quartalszinssatz, der Effektivzinssatz und der zum Quartalszinssatz konforme Monatszinssatz? Was wird aus einem Anfangskapital von 10.000 € in 2,5 Jahren?*

$$\begin{aligned} i_4 &= \frac{0{,}06}{4} = 0{,}015 = 1{,}5\%, \\ i &= (1 + 0{,}015)^4 - 1 = 0{,}061364 = 6{,}1364\%, \\ i_{12} &= \sqrt[12]{1 + 0{,}061364} - 1 = 0{,}004975 = 0{,}4975\%, \\ K_{2,5} &= 10.000 \cdot (1 + 0{,}061364)^{2,5} = 11.605{,}41. \end{aligned}$$

Die letzte Frage kann man auch mit dem Quartalszinssatz und der Anzahl der Quartale beantworten ($K_{2,5}$ ist nach wie vor das Kapital nach 2,5 Jahren und nicht nach 2,5 Quartalen):

$$K_{2,5} = 10.000 \cdot (1 + 0{,}015)^{10} = 11.605{,}41.$$

❑

1.4.4 Stetige Verzinsung

In der letzten Zeile des vorigen Beispiels haben wir gesehen, dass man, ausgehend vom Nominalzinssatz i_{nom}, die unterjährige Verzinsung auch so berechnen kann:

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{i_{nom}}{m}\right)^{mn}.$$

K_n ist das Kapital nach n Jahren bei m Zinsperioden pro Jahr, also nach mn Zinsperioden.

Bei gegebenem Nominalzinssatz wird der Effektivzinssatz

$$\left(1 + \frac{i_{nom}}{m}\right)^{m} - 1$$

höher, wenn m, also die Anzahl der Zinsperioden pro Jahr, zunimmt. Er steigt aber nicht unbeschränkt. Lässt man nämlich m gegen unendlich gehen, so kommt man zu einem Modell, bei dem in jedem Augenblick verzinst wird: zur *stetigen* Verzinsung. Hier ergibt sich der bei gegebenem Nominalzinssatz maximal mögliche Effektivzinssatz von

$$\lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{i_{nom}}{m}\right)^{m} - 1 = e^{i_{nom}} - 1$$

und damit das nach n Jahren bei gegebenem Nominalzinssatz maximal mögliche Kapital von

$$K_n = K_0\, e^{i_{nom} n}.$$

Beispiel 1.7 : *Gegeben sei ein Nominalzinssatz von 6% und stetige Verzinsung. Wie hoch ist der Effektivzinssatz? Was wird aus einem Anfangskapital von 10.000 € in 2,5 Jahren?*

$$\begin{aligned} i &= e^{0{,}06} - 1 = 0{,}061837 = 6{,}1837\%, \\ K_{2{,}5} &= 10.000 \cdot e^{0{,}06 \cdot 2{,}5} = 11.618{,}34. \end{aligned}$$

❑

1.5 Gemischte Verzinsung

Fallen Beginn oder Ende des Verzinsungszeitraumes oder beide nicht mit den Grenzen der Zinsperioden zusammen, so wird in den angeschnittenen Zeiträumen oft einfach verzinst.

Beispiel 1.8 : *Legt man bei ganzjähriger Verzinsung mit 2% p.a. ein Kapital K_0 65 Tage vor dem Jahresende 2011 an und hebt es nach 120 Tagen des Jahres 2015 ab, dann wird während dieser 65 und 120 Tage einfach verzinst und während der vollen Jahre (2012, 2013 und 2014) mit Zinseszinsen.*

Daraus ergibt sich ein Endkapital von

$$K_0 \cdot \left(1 + \frac{65}{360} \cdot 0{,}02\right) \cdot (1 + 0{,}02)^3 \cdot \left(1 + \frac{120}{360} \cdot 0{,}02\right).$$

❑

1.6 Renten

Eine Reihe von Zahlungen konstanter Höhe in konstanten Zeitabständen nennt man *Rente*. Alterspensionen sind in diesem Sinn Renten (wenn man von der Erhöhung zur Inflationsabgeltung absieht), typische Kreditrückzahlungen oder Ansparpläne ebenfalls. Die einzelne Zahlung heißt *Rate*, der Zeitabstand zwischen zwei aufeinander folgenden Zahlungen heißt *Ratenperiode* oder *Rentenperiode*. Beträgt die Ratenperiode genau ein Jahr, spricht man von einer *ganzjährigen* Rente; gibt es pro Jahr mehrere Raten, spricht man von einer *unterjährigen*. Werden die Raten jeweils zu Beginn der Ratenperiode bezahlt, nennt man die Rente *vorschüssig*, werden sie am Ende der Ratenperiode bezahlt, nennt man sie *nachschüssig*.

Um zu ermitteln, welche Summe mit einer Rente angespart wird oder wie hoch die Rückzahlung für einen Kredit ist, berücksichtigt man nicht nur die einzelnen Zahlungen, sondern auch deren Zinsen. Die Beträge – Raten, Kreditsumme usw. – werden also verzinst, und zwar mit Zinseszinsen. Addiert man über die gesamte Rentenlaufzeit die Raten und deren Zinsen, dann erhält man den *Endwert* der Rente: jenen Wert, den der gesamte Zahlungsstrom am Ende hat. Bei einem Ansparplan ist das die angesparte Summe. Man kann nun auch fragen, welchen Betrag man, anstatt Raten zu zahlen, zu Beginn der Laufzeit hätte anlegen müssen, um bei gleicher Verzinsung am Ende das gleiche Kapital, also den Endwert, zu haben. Diesen Betrag nennt man *Barwert*. Der Barwert ist also der Wert des Zahlungsstroms zu Beginn.

Barwert B und Endwert E einer Rente mit n Jahren Laufzeit und Effektivzinssatz i hängen daher stets wie folgt zusammen:

$$E = B(1+i)^n.$$

1.6.1 Ganzjährige Rente

Wir leiten nun die Beziehungen zwischen den bestimmenden Größen einer ganzjährigen Rente ab: Rate R, Laufzeit n Jahre, Effektivzinssatz i, Barwert B und Endwert E. Die Formeln werden kürzer und einprägsamer, wenn wir statt des Ausdrucks $1+i$ die Abkürzung r verwenden:

$$r = 1 + i.$$

Dieses r nennen wir den jährlichen *Aufzinsungsfaktor*. (Bei unterjähriger Verzinsung ist $r = (1+i_m)^m$ nach Abschnitt 1.4.3.) Auch für den Kehrwert des Aufzinsungsfaktors lohnt sich eine eigene Bezeichnung: Wir nennen

$$v = \frac{1}{r}$$

den jährlichen *Abzinsungsfaktor*.

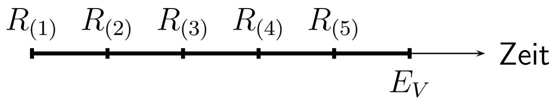
Vorschüssige Rente: Über n Jahre wird zu Beginn jedes Jahres eine Rate R bezahlt und die Raten werden mit dem Zinssatz i verzinst. Das Kapital am Ende des n-ten Jahres, also der Endwert der Rente, setzt sich dann zusammen aus den einzelnen Raten mit ihren jeweiligen Zinsen. Die 1. Rate wird n-mal verzinst, also n-mal mit dem Aufzinsungsfaktor r multipliziert. Die 2. Rate wird $(n-1)$-mal verzinst, die 3. Rate $(n-2)$-mal und schließlich die n-te und letzte Rate 1-mal. Der Endwert ist also

$$E_V = R\,r^n + R\,r^{n-1} + R\,r^{n-2} + \ldots + R\,r.$$

Die Beträge bilden eine geometrische Folge mit der Summe

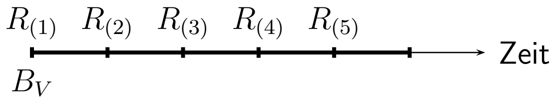
$$E_V = R\,r\,\frac{r^n - 1}{r - 1}\,.$$

Das folgende Bild zeigt beispielhaft eine vorschüssige Rente mit 5 Jahren Laufzeit.



Vorschüssige Rente mit 5 Jahren Laufzeit. $R_{(1)}$: erste Rate, $R_{(2)}$: zweite Rate usw., E_V: Endwert. Der Endwert ist der Wert des Ratenstroms zu Rentenende.

Wir haben die Rente so dargestellt, dass die Summe der Beträge oberhalb der Zeitachse (der verzinsten Raten) gleich ist dem Betrag unterhalb der Zeitachse (dem Endwert). Den Wert unterhalb der Zeitachse kann man jedem beliebigen Zeitpunkt zuordnen; man muss nur alle Verzinsungen auf diesen Zeitpunkt beziehen. Insbesondere können wir die Rente auch mit dem Barwert darstellen:



Vorschüssige Rente mit 5 Jahren Laufzeit. $R_{(1)}$: erste Rate, $R_{(2)}$: zweite Rate usw., B_V: Barwert. Der Barwert ist der Wert des Ratenstroms zu Rentenanfang.

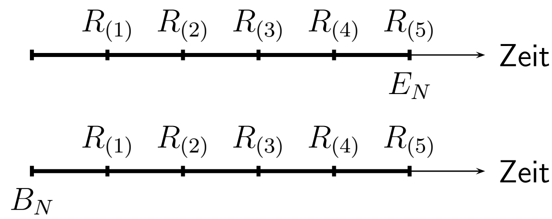
Beziehen wir alle Verzinsungen auf den Anfangszeitpunkt, erhalten wir den Barwert

$$B_V = R + R\,v + R\,v^2 + \ldots + R\,v^{n-1}$$

mit dem Abzinsungsfaktor v. Die Beträge bilden eine geometrische Folge mit der Summe

$$B_V = R\,\frac{1-v^n}{1-v}\,.$$

Nachschüssige Rente: Diese lässt sich analog darstellen:



Nachschüssige Rente mit 5 Jahren Laufzeit. $R_{(1)}$: erste Rate, $R_{(2)}$: zweite Rate usw., E_N: Endwert, B_N: Barwert.

Wieder ist die Summe der Beträge oberhalb einer Zeitachse (der verzinsten Raten) gleich dem Betrag unterhalb derselben Zeitachse (dem Endwert bzw. dem Barwert). Endwert und Barwert ergeben sich daher für nachschüssige Renten wie folgt:

$$E_N = R\,r^{n-1} + R\,r^{n-2} + R\,r^{n-3} + \ldots + R,$$

$$E_N = R\,\frac{r^n-1}{r-1}\,;$$

$$B_N = R\,v + R\,v^2 + R\,v^3 + \ldots + R\,v^n,$$

$$B_N = R\,v\,\frac{1-v^n}{1-v}\,.$$

Beispiel 1.9: *a) 10 Jahre lang werden jeweils zu Jahresbeginn 5.000 € auf ein mit 3% verzinstes und mit Kapitalertragsteuer belastetes Konto bezahlt. Wie hoch ist der am Ende des 10. Jahres angesparte Betrag? b) Von diesem Kapital soll, vom Ende des 10. Jahres an, 20 Jahre lang eine ganzjährige nachschüssige Rente bezogen werden. Wie hoch ist die jährliche Rate? c) Wie lang könnte von demselben Kapital eine ganzjährige nachschüssige Rente mit einer Jahresrate von 4.000 € bezogen werden und wie hoch wäre der Restbetrag nach Auszahlung der letzten Rate?*

Wir berechnen zuerst den Auf- und den Abzinsungsfaktor; da der Zinssatz konstant ist, gelten die Werte für alle Teilfragen dieses Beispiels. Wegen der KESt werden nur 75% des Zinssatzes wirksam. Damit beträgt der Aufzinsungsfaktor

$$r = 1 + 0{,}75 \cdot 0{,}03 = 1{,}0225$$

und der Abzinsungsfaktor

$$v = \frac{1}{r} \approx 0{,}977995.$$

(Den Abzinsungsfaktor behalten wir mit voller Genauigkeit im Rechner.)

a) Da die Raten zu Jahresbeginn bezahlt werden, kann man das Ansparen als vorschüssige Rente betrachten. Wir haben eine Rate von $R = 5.000$, eine Laufzeit von $n = 10$ und damit einen Endwert von

$$E = 5.000 \cdot 1{,}0225 \cdot \frac{1{,}0225^{10} - 1}{1{,}0225 - 1} = 56.624{,}56.$$

b) Dieser Endwert ist nun der Barwert B einer nachschüssigen Rente mit $n = 20$. Aus der Formel für den Barwert einer nachschüssigen Rente erhalten wir die Rate

$$\begin{aligned} R &= B\,\frac{1-v}{v(1-v^n)} \\ &= 56.624{,}56 \cdot \frac{1 - 0{,}977995}{0{,}977995 \cdot (1 - 0{,}977995^{20})} \\ &= 3.547{,}08. \end{aligned}$$

c) Nun wollen wir die Laufzeit einer nachschüssigen Rente wissen. Sie ergibt sich aus der Formel für den Barwert einer nachschüssigen Rente:

$$\begin{aligned} n &= \frac{\ln\left(1 - \dfrac{B(1-v)}{R\,v}\right)}{\ln v} \\ &= \frac{\ln\left(1 - \dfrac{56.624{,}56 \cdot (1 - 0{,}977995)}{4.000 \cdot 0{,}977995}\right)}{\ln 0{,}977995} \\ &= 17{,}23. \end{aligned}$$

Das Resultat besagt, dass 17 volle Raten bezogen werden können und nach der letzten Rate noch Geld auf dem Konto liegt. Diesen Restbetrag X müssen wir ermitteln. Wir können das auf zwei Arten tun (i und ii):

i) Wir zerlegen den Barwert in zwei Teile: einen Teil B', der gerade die vollen Raten deckt, und einen Rest $B'' = B - B'$. Der erste Teil ist einfach der Barwert der 17 vollen Raten:

$$B' = 4.000 \cdot 0{,}977995 \cdot \frac{1 - 0{,}977995^{17}}{1 - 0{,}977995} = 55.990{,}73.$$

Damit bleibt

$$B'' = 56.624{,}56 - 55.990{,}73 = 633{,}83.$$

Aus B'' ergibt sich bei Auszahlung der letzten Rate der Restbetrag

$$X = B''\, r^{17} = 633{,}83 \cdot 1{,}0225^{17} = 925{,}22.$$

ii) Wir ermitteln zuerst den Endwert der Rente:

$$E = B\, r^{17} = 56.624{,}56 \cdot 1{,}0225^{17} = 82.657{,}30.$$

Dieser zerfällt nun in den Endwert E' der 17 vollen Raten und den gesuchten Restbetrag X:

$$E' = 4.000 \cdot \frac{1{,}0225^{17} - 1}{1{,}0225 - 1} = 81.732{,}08,$$
$$X = E - E' = 82.657{,}30 - 81.732{,}08 = 925{,}22.$$

Natürlich führen beide Wege zum selben Resultat.

❑

Könnte man von einem Kapital ewig leben? Mit anderen Worten: Könnte man eine Rente mit unbegrenzter Laufzeit beziehen? Ja – wenn man das Kapital nicht angreift und sich nur die Zinsen auszahlen lässt. Das Kapital ist dann der Barwert einer *ewigen Rente*. Die Beziehung zwischen Rate, Zinssatz und Barwert ewiger Renten erhält man, indem man in den Barwertformeln die Laufzeit n gegen unendlich gehen lässt:

$$B_V = R\,\frac{1}{1-v}\,,$$
$$B_N = R\,v\,\frac{1}{1-v}\,.$$

Endwerte haben ewige Renten klarerweise nicht.

Beispiel 1.10: *Wie hoch wäre die Jahresrate einer ewigen nachschüssigen Rente aus dem im vorigen Beispiel angesparten Kapital?*

Aus der Barwertformel für ewige nachschüssige Renten folgt:

$$\begin{aligned} R &= B\,\frac{1-v}{v} \\ &= 56.624{,}56 \cdot \frac{1 - 0{,}977995}{0{,}977995} \\ &= 1.274{,}05. \end{aligned}$$

Dies ist die *maximale* Rate, man kann sich ja auch weniger auszahlen lassen. Sie entspricht genau den jährlichen Zinsen nach Abzug der KESt:

$$56.624{,}56 \cdot 0{,}0225 = 1.274{,}05.$$

❑

1.6.2 Unterjährige Rente

Werden jährlich mehrere Raten bezahlt, dann passt man zum Rechnen die Zinsperiode an die Ratenperiode an: Bei q Raten pro Jahr teilt man das Jahr in q fiktive Zinsperioden. So kann man die Formeln des vorigen Abschnitts verwenden und muss nur statt n die Gesamtanzahl nq der Zinsperioden einsetzen, statt r den unterjährigen Aufzinsungsfaktor r_q und statt v den unterjährigen Abzinsungsfaktor v_q.

Wie man r_q und v_q berechnet, ist gesetzlich festgelegt. Es wird in Österreich anders gemacht als in der Schweiz und wieder anders in den USA, und für Sparguthaben anders als für Kredite und wieder anders für Bundesanleihen. Insgesamt herrscht ein ziemliches Durcheinander. Wir gehen nur auf die immer häufiger angewandte Methode der International Securities Market Association ISMA ein. Diese verwendet den konformen Zinssatz; damit wird

$$r_q = \sqrt[q]{r}\,,$$
$$v_q = \sqrt[q]{v}\,.$$

(Bei unterjähriger Verzinsung ist wiederum $r = (1 + i_m)^m$ nach Abschnitt 1.4.3.) Für Renten mit einer Laufzeit von nq Ratenperioden ergibt sich:

$$E_V = R\, r_q\, \frac{r_q^{nq} - 1}{r_q - 1}\,,$$
$$B_V = R\, \frac{1 - v_q^{nq}}{1 - v_q}\,,$$
$$E_N = R\, \frac{r_q^{nq} - 1}{r_q - 1}\,,$$
$$B_N = R\, v_q\, \frac{1 - v_q^{nq}}{1 - v_q}\,,$$

und für ewige Renten:

$$B_V = R\, \frac{1}{1 - v_q}\,,$$
$$B_N = R\, v_q\, \frac{1}{1 - v_q}\,.$$

Beispiel 1.11 : *Wie hoch ist die jeweils zu Monatsbeginn fällige Rückzahlungsrate für einen 10-Jahres-Kredit über 60.000 € bei 8% p.a.?*

Rückgezahlt wird also in Form einer vorschüssigen Rente mit $q = 12$. Die Kreditsumme ist der Barwert der Rente. Zunächst ermitteln wir den Abzinsungsfaktor

$$v_{12} = \sqrt[12]{\frac{1}{1{,}08}} \approx 0{,}993607$$

und halten ihn mit voller Genauigkeit im Rechner. Aus der Barwertformel erhalten wir die Rate:

$$\begin{aligned} R &= B\, \frac{1 - v_q}{1 - v_q^{nq}} \\ &= 60.000 \cdot \frac{1 - 0{,}993607}{1 - 0{,}993607^{10\cdot 12}} \\ &= 714{,}55. \end{aligned}$$

❑

1.7 Tilgung

Wir haben im vorigen Beispiel den Fall betrachtet, dass ein Kredit durch konstante Raten in konstanten Zeitabständen, also in Form einer Rente zurückbezahlt wird. Natürlich kann eine Schuld auch durch mehrere Zahlungen unterschiedlicher Höhe beglichen – *getilgt* – werden. Die Zahlungen sind dann einzeln zu erfassen, und eine solche Erfassung nennt man *Tilgungsplan*.

Beispiel 1.12 : *Für ein Darlehen von 10.000 €, verzinst mit 6% p.a., wird folgende Rückzahlung vereinbart: Am Ende des ersten Jahres werden nur die angefallenen Zinsen bezahlt; am Ende des zweiten Jahres werden 3.000 € bezahlt, am Ende des dritten Jahres 4.000 €, und am Ende des vierten Jahres der Rest.*

Wir besprechen die einzelnen Vorgänge anhand des Tilgungsplans. Dieser sieht so aus:

Jahr	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität
1	10.000,00	600,00	0,00	600,00
2	10.000,00	600,00	2.400,00	3.000,00
3	7.600,00	456,00	3.544,00	4.000,00
4	4.056,00	243,36	4.056,00	4.299,36
5	0,00	–	–	–

Zu Beginn des ersten Jahres beträgt die Restschuld 10.000 €, die Darlehenssumme. Im ersten Jahr fallen 600 € Zinsen an (6% der Restschuld); diese Zinsen werden vereinbarungsgemäß am Jahresende bezahlt. Die *Tilgung*, das ist der rückbezahlte Anteil der Darlehenssumme, ist null. Damit beträgt die gesamte Zahlung, die *Annuität*, im ersten Jahr 600 €.

Zu Beginn des zweiten Jahres beträgt die Restschuld noch immer 10.000 €, da ja im ersten Jahr nur die Zinsen erstattet wurden. Wieder fallen 600 € Zinsen an (6% der Restschuld). In der Annuität von 3.000 € sind diese Zinsen enthalten, und der Rest von 2.400 € dient als Tilgung zum Abtragen der Restschuld.

Zu Beginn des dritten Jahres beträgt die Restschuld 7.600 €, die Darlehenssumme abzüglich der Tilgung. Es fallen 456 € Zinsen an (6% der Restschuld). Die Annuität von 4.000 € setzt sich zusammen aus diesen Zinsen und einer Tilgung von 3.544 €.

Zu Beginn des vierten Jahres beträgt die Restschuld 4.056 €, die Darlehenssumme abzüglich der gesamten bisher erfolgten Tilgung. Es fallen 243,36 € Zinsen an (6% der Restschuld). Restschuld und Zinsen ergeben zusammen 4.299,36 € und werden vereinbarungsgemäß mit der letzten Annuität beglichen.

❏

Vier Tilgungsformen kommen häufig vor und tragen daher besondere Namen: Bei einer *gestundeten Schuld* wird während der Tilgungsdauer nichts bezahlt; die gesamte Schuld wird am Ende mit Zinseszinsen in einer einzigen Annuität beglichen. Bei einer *Zinsschuld* werden während der Tilgungsdauer nur die Zinsen bezahlt, die gesamte Tilgung erfolgt mit der letzten Annuität. Bei einer *Ratenschuld* werden jedes Jahr die Zinsen und eine stets gleich hohe Tilgung bezahlt. Bei einer *Annuitätenschuld* sind alle Annuitäten gleich hoch.

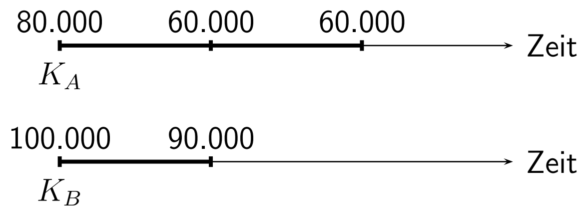
1.8 Beispiele

Dieser Abschnitt enthält nichts wirklich Neues. Wir lernen aber, wie man vorgeht, wenn es scheinbar schwierig wird: beim Vergleichen zweier Zahlungsströme, beim Berechnen von Verzinsungstagen oder bei einer Rente, deren Daten sich während der Laufzeit ändern.

Beispiel 1.13 : *Für den Kauf eines Hauses liegen zwei Finanzierungsangebote vor. Angebot A: Anzahlung 80.000 €, zwei Raten zu je 60.000 € nach einem Jahr und nach zwei Jahren; Angebot B: Anzahlung 100.000 €, Restzahlung 90.000 € nach einem Jahr. a) Welches Angebot ist bei einem Zinssatz von 8% p.a. für den Käufer günstiger? b) Bei welchem Zinssatz sind beide gleichwertig?*

Vergleicht man die Werte zweier Zahlungsströme X und Y, so muss man beide auf denselben Zeitpunkt beziehen, also die Zahlungen beider Ströme auf denselben Zeitpunkt hin auf- oder abzinsen. Welchen Zeitpunkt man wählt, ist, sofern mit Zinseszinsen gerechnet wird, egal; denn haben X und Y in Bezug auf *irgendeinen* Zeitpunkt denselben Wert, dann haben sie in Bezug auf *jeden* Zeitpunkt denselben Wert, und ist X in Bezug auf irgendeinen Zeitpunkt mehr wert als Y, dann ist X in Bezug auf jeden Zeitpunkt mehr wert als Y. Diese Überlegung wenden wir nun beim Vergleich der Angebote an.

Als Vergleichszeitpunkt wählen wir den Zeitpunkt des Kaufs. Wir können dann die Zahlungsströme so veranschaulichen:



Angebote A (oben) und B (unten). K_A und K_B bezeichnen jeweils den Wert des Zahlungsstroms zum Zeitpunkt des Kaufs.

a) Welches Angebot ist bei einem Zinssatz von 8% p.a. für den Käufer günstiger?

Wir verzinsen alle Zahlungen auf den Zeitpunkt des Kaufs. Mit dem Abzinsungsfaktor

$$v = \frac{1}{1{,}08} \approx 0{,}925926,$$

den wir wie immer mit voller Genauigkeit im Rechner behalten, ergibt sich:

$$K_A = 80.000 + 60.000\,v + 60.000\,v^2 = 186.995{,}88,$$
$$K_B = 100.000 + 90.000\,v = 183.333{,}33.$$

Also ist das Angebot B für den Käufer günstiger.

b) Bei welchem Zinssatz sind die Angebote gleichwertig?

Wir wollen also wissen, bei welchem Zinssatz $K_A = K_B$ ist. Aus

$$80.000 + 60.000\,v + 60.000\,v^2 = 100.000 + 90.000\,v$$

erhalten wir nach Zusammenfassen und Kürzen die quadratische Gleichung

$$6\,v^2 - 3\,v - 2 = 0$$

für den Abzinsungsfaktor. Sie hat eine positive Lösung:

$$v \approx 0{,}879153;$$

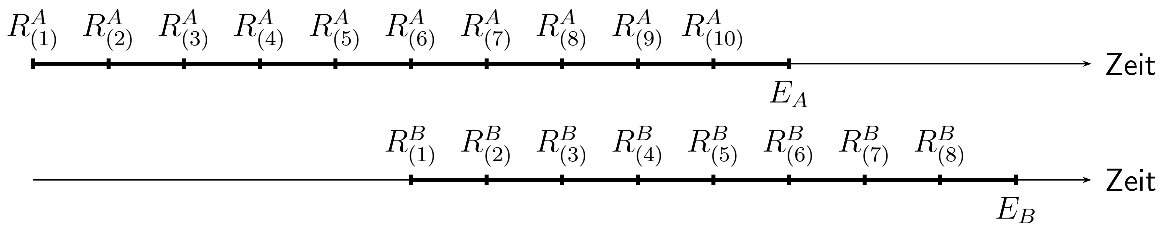
die zweite Lösung ist negativ und kommt als Abzinsungsfaktor nicht in Frage. Nun ergibt sich

$$r = \frac{1}{v} \approx 1{,}137459,$$

und das heißt: Bei einem Zinssatz von rund 13,75% sind die Angebote gleichwertig.

❑

Beispiel 1.14 : *Eine ganzjährige vorschüssige Rente A mit einer Rate von 3.000 € und 10 Jahren Laufzeit soll durch eine gleichwertige Rente B ersetzt werden, die 5 Jahre später beginnt, ebenfalls ganzjährig und vorschüssig ist und 8 Jahre läuft. Wie hoch ist deren Rate bei 6% Zinsen?*



Die beiden Renten sollen den gleichen Wert haben. Vergleichen wir sie zum Endzeitpunkt der Rente B, also 3 Jahre nach dem Ende der Rente A; für ihre Endwerte muss dann gelten:

$$E_B = E_A\, r^3.$$

Aus dem Endwert von A,

$$E_A = 3.000 \cdot 1{,}06 \cdot \frac{1{,}06^{10} - 1}{1{,}06 - 1} = 41.914{,}93,$$

folgt der Endwert von B:

$$E_B = 41.914{,}93 \cdot 1{,}06^3 = 49.921{,}35.$$

Aus diesem ergibt sich die Rate für B:

$$\begin{aligned} R^B &= 49.921{,}35 \cdot \frac{1{,}06 - 1}{1{,}06 \cdot (1{,}06^8 - 1)} \\ &= 4.758{,}35. \end{aligned}$$

❑

Beispiel 1.15 : *Am 22. August 2003 wurde ein Sparbuch mit 2% Zinsen und 5.000 € Einlage eröffnet. Am 15. März 2011 wurde alles einschließlich Zinseszinsen (abzüglich KESt) abgehoben. Wie hoch war der Gesamtbetrag?*

Da die Zinsperiode bei Sparbüchern ein Jahr ist und hier über angeschnittene Jahre verzinst wurde, liegt gemischte Verzinsung vor. Der effektive Zinssatz nach Abzug der KESt ist

$$0{,}75 \cdot 2\% = 1{,}5\%.$$

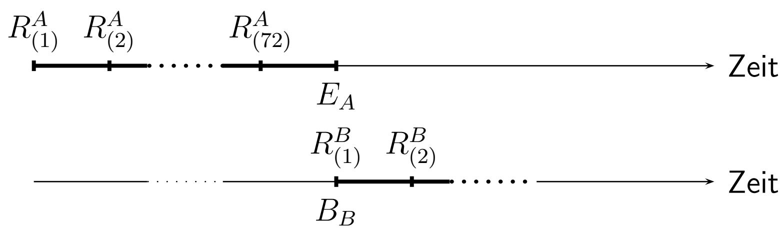
Nun zur Aufteilung der Verzinsungsdauer: Im Jahr 2003 wurde über 128 Tage einfach verzinst; denn nach dem Eröffnungstag blieben noch 8 Tage im August (die Finanzleute glauben ja, jeder Monat hätte 30 Tage) und danach die Monate September bis Dezember, die auch mit je 30 Tagen gerechnet werden. Dann kamen 7 volle Jahre, 2004 bis 2010, in denen Zinseszinsen anfielen. Im Jahr 2011 schließlich lagen vor der Abhebung Jänner und Februar zu je 30 Tagen sowie 14 Tage im März, also zusammen 74 Tage mit einfacher Verzinsung. So ergab sich ein Endbetrag von

$$5.000 \cdot \left(1 + \frac{128}{360} \cdot 0{,}015\right) \cdot (1 + 0{,}015)^7 \cdot \left(1 + \frac{74}{360} \cdot 0{,}015\right) = 5.596{,}02.$$

❏

Beispiel 1.16 : *Ein Kredit von 50.000 € wird zu einem Effektivzinssatz von 7,5% p.a. aufgenommen. Rückgezahlt wird in vorschüssigen Monatsraten von 700 €, und zugleich mit der letzten Rate ist der Restbetrag fällig. Am Ende des sechsten Jahres senkt die Bank den Zinssatz auf 7%; die Raten bleiben gleich. Wie lang läuft der Kredit und wie hoch ist der Restbetrag?*

Da sich während der Kreditlaufzeit der Zinssatz ändert, müssen wir die Rechnung teilen: in eine erste Teilrente A über 6 Jahre mit 7,5% p.a. und eine zweite Teilrente B über den Rest der Laufzeit mit 7% p.a.; Barwert von B ist der Restwert von A: jener Teil des Kreditbetrags, der am Ende von A noch nicht zurückgezahlt ist.



Wir berechnen den Barwert von B wie in Beispiel 1.9 c, Methode ii, zinsen also den Kreditbetrag 6 Jahre auf und subtrahieren den Endwert der Teilrente A. Diese ist vorschüssig, hat einen monatlichen Aufzinsungsfaktor von $\sqrt[12]{1{,}075} \approx 1{,}006045$ und eine Laufzeit von 72 Monaten. Für den Barwert von B ergibt sich damit:

$$B_B = 50.000 \cdot 1{,}075^6 - 700 \cdot 1{,}006045 \cdot \frac{1{,}006045^{72} - 1}{1{,}006045 - 1} = 13.870{,}59.$$

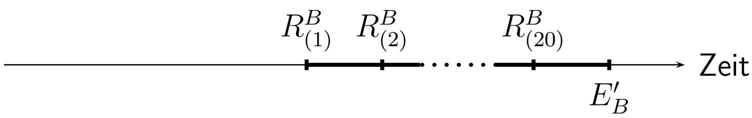
Nun ermitteln wir die Laufzeit der Teilrente B. B ist vorschüssig und hat einen monatlichen Abzinsungsfaktor von $v_{12} = \sqrt[12]{1/1{,}07} \approx 0{,}994378$. Für ihre Laufzeit folgt daher:

$$\begin{aligned} n_B &= \frac{\ln\left(1 - \dfrac{13.870{,}59 \cdot (1 - 0{,}994378)}{700}\right)}{\ln 0{,}994378} \\ &= 20{,}95. \end{aligned}$$

Nach der Zinssenkung sind also noch 20 volle Raten und ein Restbetrag zu bezahlen. Die gesamte Kreditlaufzeit ist damit 92 Monate. Den Restbetrag finden wir wieder, indem wir vom Endwert der Teilrente B,

$$E_B = B_B \, r_{12}^{20} \quad \text{mit} \quad r_{12} = \sqrt[12]{1{,}07} \approx 1{,}005654,$$

den Endwert E'_B der 20 vollen Raten abziehen.



Diesmal müssen wir aber noch eine kleine Korrektur anbringen. Denn E_B und E'_B gelten für den Endzeitpunkt der Teilrente B; gefragt ist aber der Restbetrag, der *zugleich mit der letzten Rate* fällig ist. Und da die letzte Rate einen Monat vor diesem Endzeitpunkt bezahlt wird, müssen wir die Differenz noch einen Monat abzinsen. So erhalten wir den Restbetrag

$$\begin{aligned} X &= (E_B - E'_B)\, v_{12} \\ &= \left(13.870{,}59 \cdot 1{,}005654^{20} - 700 \cdot 1{,}005654 \cdot \frac{1{,}005654^{20} - 1}{1{,}005654 - 1}\right) \cdot 0{,}994378 \\ &= 660{,}87. \end{aligned}$$

❑

Beispiel 1.17 : *Wir erstellen die Tilgungspläne für ein Darlehen von 30.000 € auf 3 Jahre zu 5% p.a. a) als gestundete Schuld, b) als Zinsschuld, c) als Ratenschuld, d) als Annuitätenschuld.*

a) Gestundete Schuld: Während der Tilgungsdauer wird nichts bezahlt; die gesamte Schuld wird am Ende mit Zinseszinsen in einer einzigen Annuität beglichen. Hier ist die Tilgung in den ersten zwei Jahren negativ, da ja die Schuld um die anfallenden Zinsen wächst.

Jahr	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität
1	30.000,00	1.500,00	−1.500,00	0,00
2	31.500,00	1.575,00	−1.575,00	0,00
3	33.075,00	1.653,75	33.075,00	34.728,75
4	0,00	–	–	–

b) Zinsschuld: Während der Tilgungsdauer werden nur die Zinsen bezahlt, die gesamte Tilgung erfolgt mit der letzten Annuität. Hier ist die Tilgung in den ersten zwei Jahren null, da die Schuld weder wächst noch fällt.

Jahr	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität
1	30.000,00	1.500,00	0,00	1.500,00
2	30.000,00	1.500,00	0,00	1.500,00
3	30.000,00	1.500,00	30.000,00	31.500,00
4	0,00	–	–	–

c) Ratenschuld: Jedes Jahr werden die Zinsen und eine stets gleich hohe Tilgung bezahlt. Die Tilgung ergibt sich daher, wenn man den Darlehensbetrag durch die Laufzeit dividiert.

Jahr	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität
1	30.000,00	1.500,00	10.000,00	11.500,00
2	20.000,00	1.000,00	10.000,00	11.000,00
3	10.000,00	500,00	10.000,00	10.500,00
4	0,00	–	–	–

d) Annuitätenschuld: Alle Annuitäten sind gleich hoch; das heißt, wir haben eine ganzjährige nachschüssige Rente mit dem Darlehensbetrag als Barwert, 3 Jahren Laufzeit, dem Abzinsungsfaktor $1/1{,}05 \approx 0{,}952381$ und der Annuität als Rate. Daher ist die Annuität gleich

$$30.000 \cdot \frac{1 - 0{,}952381}{0{,}952381 \cdot (1 - 0{,}952381^3)} = 11.016{,}26.$$

Jahr	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität
1	30.000,00	1.500,00	9.516,26	11.016,26
2	20.483,74	1.024,19	9.992,07	11.016,26
3	10.491,67	524,58	10.491,67	11.016,25
4	0,00	–	–	–

Dass die letzte Annuität um einen Cent geringer ist als die anderen, liegt an der Rundung.

❏

5 SACHREGISTER

A

B

C

D

E

F

G

H

I

K

L

M

N

O

P

Q

R

S