Wolfgang Tschirk

MATHE – Matura
Band 3: HTL

Ergänzungen für
berufsbildende höhere Schulen der Technik

(Inhaltsverzeichnis und Sachregister;
und dazwischen zum Probelesen
das Kapitel "Differentialrechnung")

www.mathecampus.at

Dieses Skriptum soll Schülerinnen und Schülern berufsbildender höherer Schulen der Technik bei ihrer Maturavorbereitung helfen. Es enthält den Maturastoff, soweit er die Mathematik allgemeinbildender höherer Schulen übersteigt, und ergänzt somit den Band 1 dieser Reihe. Für die Statistik gibt es mit Band 4 ein eigenes Skriptum.

Ich wünsche Ihnen/dir viel Erfolg!
Wolfgang Tschirk

MATHE – Matura

Band 1: AHS	Grundlagen für allgemeinbildende höhere Schulen
Band 2: HAK	Ergänzungen für berufsbildende höhere Schulen der Wirtschaft
Band 3: HTL	Ergänzungen für berufsbildende höhere Schulen der Technik
Band 4: Statistik	Statistik für berufsbildende höhere Schulen

1. Auflage 2011-06-01

Mag. Wolfgang Tschirk
Mathematik und Physik für Schüler und Studenten
Wien, Österreich
www.mathecampus.at

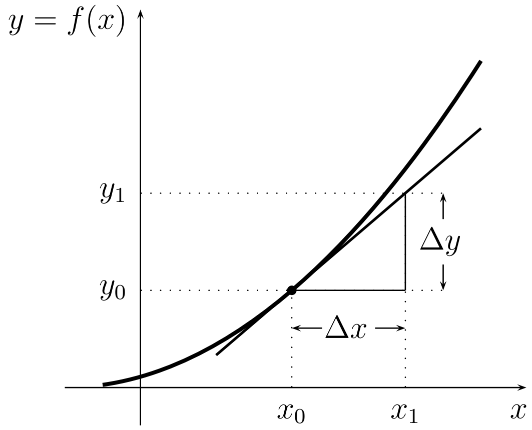
Inhaltsverzeichnis

3 DIFFERENTIALRECHNUNG

3.1 Steigung der Tangente

Betrachten wir eine reelle Funktion $y = f(x)$ und darin einen Punkt $(x_0 \,|\, y_0)$ mit $y_0 = f(x_0)$. Wie ändert sich y, wenn sich x um einen kleinen Betrag ändert? Je stärker sich y ändert, desto steiler verläuft der Graph der Funktion an der Stelle x_0. Die Stärke der Änderung kann also durch die Steigung der Tangente im Punkt $(x_0 \,|\, y_0)$ ausgedrückt werden. Wählen wir zwei beliebige Punkte der Tangente, etwa $(x_0 \,|\, y_0)$ und $(x_1 \,|\, y_1)$, dann ist die Steigung k der Tangente gegeben durch:

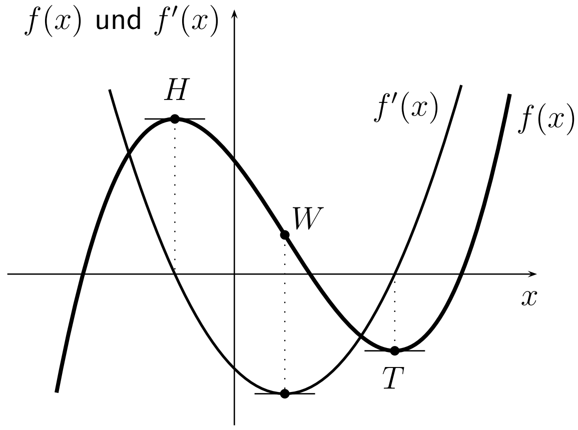
$$k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\,.$$



Die Steigung der Tangente an den Graphen von $f(x)$ im Punkt $(x_0 \,|\, y_0)$ ist ein Maß für die Änderung der Funktion an dieser Stelle.

3.2 Erste Ableitung

Jedem Punkt, der eine Tangente besitzt, kann eine Steigung zugeordnet werden. Ordnet man die Steigung dem x-Wert des Punktes zu, so entsteht eine neue Funktion: die erste Ableitung $f'(x)$ der Funktion $f(x)$.



Graphen einer Funktion $f(x)$ und ihrer ersten Ableitung $f'(x)$. An den lokalen Extrempunkten H und T ist die Tangente horizontal; dort ist also ihre Steigung null: $f'(x) = 0$. Am Wendepunkt W hat die Steigung selbst einen Extremwert.

3.3 Ableitungsregeln

Die erste Ableitung (kurz: die Ableitung) $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ kann man berechnen als

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\,.$$

Für die "unendlich kleinen" Differenzen der x- und y-Werte, die sich in Zähler und Nenner ergeben, wenn man den Grenzwert bildet, schreibt man auch dx und dy, und daher:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

(man liest: "dy nach dx" und nennt diese Größe den Differentialquotienten). Das Berechnen der Ableitung nennt man differenzieren. In der Praxis verwendet man dazu fertige Rechenregeln, die auf dem Grenzwert basieren, aber die Grenzwertbildung nicht mehr erfordern.

Ableitungen einiger wichtiger Funktionen ($k, q \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+$):

$(k)' = 0$ — Konstante Funktion:
$f(x) = 3 \;\longrightarrow\; f'(x) = 0$; anders geschrieben: $(3)' = 0$.

$(x^q)' = q \cdot x^{q-1}$ — Potenzfunktion:
$(x)' = 1,\;\; (x^3)' = 3\,x^2,\;\; (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,,\;\; \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\,\dfrac{1}{x^2}\,.$

$(e^x)' = e^x$ — Exponentialfunktion

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ — Exponentialfunktion:
$(10^x)' = 10^x \ln 10,\;\; (2.3^x)' = 2.3^x \ln 2.3.$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ — Logarithmusfunktion

$(\sin x)' = \cos x$ — Sinusfunktion

$(\cos x)' = -\sin x$ — Cosinusfunktion

$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$ — Tangensfunktion

Ableitungen einiger wichtiger Funktionsverknüpfungen ($k \in \mathbb{R}$):

$(k \cdot f)' = k \cdot f'$ — Ableitung des Vielfachen = Vielfaches der Ableitung:
$(3x^2)' = 3 \cdot (x^2)' = 3 \cdot 2x = 6x.$

$(f + g)' = f' + g'$ — Ableitung der Summe = Summe der Ableitungen:
$(x^3 + x^2)' = (x^3)' + (x^2)' = 3x^2 + 2x.$

$(f - g)' = f' - g'$ — Ableitung der Differenz = Differenz der Ableitungen:
$(x^3 - x^2)' = (x^3)' - (x^2)' = 3x^2 - 2x.$

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$	Produktregel: $(x^2 \cdot \sin x)' = (x^2)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x.$
$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	Quotientenregel: $\left(\dfrac{x^2}{\sin x}\right)' = \dfrac{(x^2)' \cdot \sin x - x^2 \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \dfrac{2x \sin x - x^2 \cos x}{\sin^2 x}.$
$(f^g)' = f^g \cdot \left(g' \cdot \ln f + g \cdot \dfrac{f'}{f}\right)$	Potenzregel: $(x^x)' = x^x \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x}\right) = x^x\,(\ln x + 1).$
$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$	Kettenregel: $(\sin x^2)' = (\sin' x^2) \cdot (x^2)' = (\cos x^2) \cdot 2x.$

Nicht jede Funktion besitzt an jeder Stelle eine Tangente. Wo der Funktionswert springt oder der Graph eine Ecke hat, gibt es keine Tangente; dort ist die Funktion nicht differenzierbar.

Nirgends differenzierbar ist beispielsweise die Funktion $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

3.4 Höhere Ableitungen

Da die erste Ableitung einer Funktion wieder eine Funktion ist, kann man eventuell auch sie ableiten und erhält die zweite Ableitung f''. Leitet man diese ab, gelangt man zur dritten Ableitung usw. Man schreibt f', f'', f''', ... oder allgemein $f^{(k)}$ für die k-te Ableitung.

Beispiel 3.1 : *Die ersten drei Ableitungen von* $f(x) = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{3x^2}{2} + 1.$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2}{2} - 3x, \\ f''(x) &= x - 3, \\ f'''(x) &= 1. \end{aligned}$$

❏

Beispiel 3.2 : *Die ersten drei Ableitungen von* $f(x) = \sin x^2.$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \cos x^2, \\ f''(x) &= 2 \cos x^2 - 4x^2 \sin x^2, \\ f'''(x) &= -12x \sin x^2 - 8x^3 \cos x^2. \end{aligned}$$

❏

Die erste Ableitung haben wir als Steigung der Tangente an den Graphen kennen gelernt. Die zweite Ableitung hängt mit der Krümmung des Graphen zusammen: Ist $f''(x_0) > 0$, dann ist der Graph an der Stelle x_0 aufwärts gekrümmt, bei $f''(x_0) < 0$ abwärts, bei $f''(x_0) = 0$ gar nicht. Die höheren Ableitungen ab der dritten haben weniger anschauliche Bedeutungen.

3.5 Methoden für nicht-explizite Funktionen

Oft will man dy/dx ermitteln, hat aber y nicht in der Form $y = f(x)$, also explizit, gegeben. Die drei wichtigsten Fälle besprechen wir in diesem Abschnitt.

3.5.1 Implizite Ableitung

Ist y implizit durch eine Beziehung $g(x, y) = 0$ gegeben, so kann man y' direkt aus dieser Beziehung ermitteln. Dazu leitet man sie nach x ab: $(g(x, y))' = 0$; da y eine Funktion von x ist, erfordern die Ableitungen der y-Ausdrücke die Kettenregel.

Beispiel 3.3 : *Steigung der Tangente an den Kreis* $x^2 + y^2 = r^2$.

Wir leiten die Kreisgleichung ab und rechnen y' aus:

$$2x + 2yy' = 0 \longrightarrow y' = -\frac{x}{y}\,.$$

❑

Beispiel 3.4 : *Gesucht ist* y' *aus der Beziehung* $x^2 - y \ln y = 0$.

Im vorigen Beispiel hätten wir y auch explizit ausdrücken können ($y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$) und dann nach gewohnter Art ableiten. Nun aber könnten wir, selbst wenn wir wollten, y nicht explizit darstellen. Mit impliziter Ableitung erhalten wir:

$$2x - (y' \ln y + y\,\frac{1}{y}\,y') = 0 \longrightarrow y' = \frac{2x}{\ln y + 1}\,.$$

❑

3.5.2 Ableitung der Umkehrfunktion

Hat f eine Umkehrfunktion g, gilt also mit $y = f(x)$ auch $x = g(y)$, und sind die Ableitungen der beiden Funktionen ungleich null, dann gilt:

$$f'(x) \cdot g'(y) = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1.$$

So kann man eine Funktion ableiten, die zwar nicht selbst explizit darstellbar ist, deren Umkehrfunktion aber explizit gemacht werden kann.

Beispiel 3.5 : *Gesucht ist* y' *aus der Beziehung* $x^2 - y \ln y = 0$ *(wie Beispiel 3.4).*

Wir können zwar y nicht explizit ausdrücken, wohl aber x:

$$x = \pm\sqrt{y \ln y}\,.$$

Nun verwenden wir die Ableitung dieser Umkehrfunktion:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\pm\dfrac{\ln y + 1}{2\sqrt{y \ln y}}} = \pm\frac{2\sqrt{y \ln y}}{\ln y + 1} = \frac{2x}{\ln y + 1}\,.$$

❑

Beispiel 3.6 : *Die Ableitungen der Arcusfunktionen.*

$y = \arcsin x$ bedeutet $x = \sin y$, und Analoges gilt für $\arccos x$ und $\arctan x$. Daraus folgt:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

❏

3.5.3 Ableitung von Funktionen in Parameterdarstellung

Sind x und y als Funktionen einer dritten Größe (eines Parameters) t gegeben, also $x(t)$ und $y(t)$, so kann man dy/dx berechnen, ohne zuvor y als Funktion von x darzustellen. Bezeichnen wir die Ableitungen nach dem Parameter mit einem Punkt, so gilt:

$$y' = \frac{\dot y}{\dot x} \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\,.$$

Beispiel 3.7 : *Steigung der Tangente an den Kreis* $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$.

Hier ist der Radius r eine Konstante und der Winkel φ der Parameter.

$$y' = \frac{\dot y}{\dot x} = \frac{r\cos\varphi}{-\,r\sin\varphi} = -\,\frac{x}{y}\,.$$

Natürlich haben wir dasselbe Resultat erhalten wie in Beispiel 3.3.

❏

Beispiel 3.8 : *Wie ändert sich beim freien Fall die Geschwindigkeit mit dem Weg?*

Geschwindigkeit v und Weg s hängen beim freien Fall von der Zeit t ab:

$$v = gt,$$
$$s = \frac{g}{2}\,t^2,$$

wobei g für die Erdbeschleunigung steht. Es folgt:

$$\frac{dv}{ds} = \frac{\dot v}{\dot s} = \frac{g}{gt} = \frac{gt}{gt^2} = \frac{v}{2s}\,.$$

❏

3.6 Anwendungen der Differentialrechnung

3.6.1 Newtonsches Nullstellenverfahren

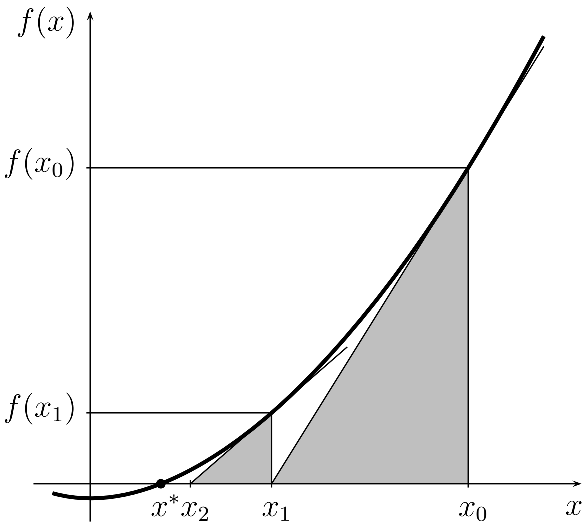
Viele Gleichungen kann man nicht geschlossen lösen, das heißt, man kann keine Formel angeben, in der die Lösung als Funktion der Koeffizienten erscheinen würde. In solchen Fällen greift man zu Näherungsverfahren. Das wohl gebräuchlichste nimmt die Differentialrechnung zu Hilfe. Wir werden es in diesem Abschnitt besprechen.

Die Gleichung

$$f(x) = 0$$

lösen heißt: alle x-Werte finden, für die die Gleichung stimmt, also alle Nullstellen der Funktion $f(x)$ ermitteln. Während geschlossene Lösungen meist alle Nullstellen auf einmal liefern, kann man mit einem Näherungsverfahren nur eine Nullstelle nach der anderen bestimmen. Wie viele Nullstellen eine Funktion hat, erfährt man durch ein Näherungsverfahren nicht.

Um mit dem newtonschen Verfahren eine Nullstelle x^* von $f(x)$ zu finden, gehen wir vor wie folgt: Wir wählen einen Startwert x_0, bestimmen dessen Funktionswert $f(x_0)$ und legen im Punkt $(x_0|f(x_0))$ die Tangente an den Graphen von f. Ist x_0 nicht gerade unglücklich gewählt, so liegt die Nullstelle der Tangente, wir nennen sie x_1, näher bei x^*, als x_0 dies tut. Mit x_1 wiederholen wir den Vorgang: bestimmen $f(x_1)$, legen die Tangente in $(x_1|f(x_1))$ und erhalten eine neue, noch bessere Näherung x_2. Dies machen wir so lange, bis x^* mit der gewünschten Genauigkeit gefunden ist.



Newtonsches Nullstellenverfahren. x^*: Nullstelle; x_0: Startwert; x_1, x_2: Näherungswerte für x^* nach der ersten und zweiten Iteration.

Die schattierten Dreiecke zeigen die Tangentensteigungen an den Stellen x_k:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}\,, \quad f'(x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2}\,, \quad \cdots \quad \longrightarrow \quad f'(x_k) = \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}}\,.$$

Aus der letzten Beziehung drücken wir x_{k+1} aus und erhalten eine Formel für die Iteration: Hat man eine Näherung x_k, so gewinnt man die folgende Näherung durch:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\,.$$

Beispiel 3.9 : *Wir suchen eine Nullstelle der Funktion* $f(x) = \ln x + x$.

Wir bilden zunächst die Ableitung von f:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 1.$$

Als Startwert wählen wir:

$$x_0 = 1.$$

Die ersten drei Iterationen ergeben:

$$x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{1}{2} = 0.5,$$

$$x_2 = 0.5 - \frac{f(0.5)}{f'(0.5)} = 0.5 - \frac{-0.19315}{3} = 0.56438.$$

$$x_3 = 0.56438 - \frac{f(0.56438)}{f'(0.56438)} = 0.56438 - \frac{-0.00764}{2.77185} = 0.56714.$$

Dieser Wert stimmt mit der richtigen Nullstelle bis zur fünften Dezimalstelle überein, und der zugehörige Funktionswert unterscheidet sich erst in der fünften Dezimalstelle von null.

Wir fassen den Rechengang in einer Tabelle zusammen:

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	1.00000	1.00000	2.00000
1	0.50000	-0.19315	3.00000
2	0.56438	-0.00764	2.77185
3	0.56714	-0.00001	2.76324
4	0.56714	0.00000	2.76322

Die Lösung lautet also:

$$x^* = 0.56714.$$

Sie kann beliebig genau bestimmt werden, wobei sich die Anzahl der richtigen Stellen mit jeder Iteration etwa verdoppelt.

❏

Nicht immer ist x_{k+1} ein besserer Näherungswert als x_k. Wenn im betrachteten Bereich die Funktion stark gekrümmt ist, ihre Werte weit von null abweichen oder ihre Steigung gering ist, kann das Verfahren sogar scheitern. Damit man eine Nullstelle findet, muss im Intervall, das die Nullstelle und alle Näherungswerte enthält, die Bedingung:

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1$$

erfüllt sein.

3.6.2 Funktionsuntersuchungen

Beim Untersuchen von Funktionen gibt es zwei Grundaufgaben:

1) Gegeben ist der Funktionsausdruck, gesucht sind Eigenschaften der Funktion.
2) Gegeben sind Eigenschaften der Funktion, gesucht ist der Funktionsausdruck.

Wir besprechen zunächst die wichtigsten Eigenschaften von Funktionen und rechnen dann für jede der Grundaufgaben ein Beispiel.

Wesentliche Eigenschaften einer Funktion $y = f(x)$ sind:

Nullstellen: jene Stellen, wo y den Wert null annimmt. Für Nullstellen gilt daher $f(x) = 0$.

Extrempunkte: Hoch- und Tiefpunkte (lokale Maxima und Minima). An Extrempunkten hat der Funktionsgraph horizontale Tangenten, also die Steigung null. Für Extrempunkte gilt daher $f'(x) = 0$. Gilt zusätzlich $f''(x) < 0$, dann liegt ein Hochpunkt vor, bei $f''(x) > 0$ ein Tiefpunkt. Ist hingegen $f''(x) = 0$, dann hängt die Art des Punktes von den höheren Ableitungen ab; oft handelt es sich um einen Horizontalwendepunkt (auch Treppenpunkt, Terrassenpunkt oder – irreführend – Sattelpunkt genannt).

Wendepunkte: jene Punkte, an denen sich die Krümmungsrichtung des Graphen ändert. Dort hat die Steigung einen Extremwert. Für Wendepunkte gilt daher $f''(x) = 0$. Ist zusätzlich $f'''(x) \neq 0$, so liegt sicher ein Wendepunkt vor. Falls $f'''(x) = 0$, dann sagen erst die höheren Ableitungen, ob es sich um einen Wendepunkt handelt.

Monotonie-Intervalle: Abschnitte auf der x-Achse, in denen das Vorzeichen von $f'(x)$ gleich bleibt.

Krümmungs-Intervalle: Abschnitte auf der x-Achse, in denen das Vorzeichen von $f''(x)$ gleich bleibt.

Tangenten: Gerade, die den Graphen berühren. Tangenten haben mit dem Graphen den Berührpunkt gemeinsam, und ihre Steigung ist gleich der Ableitung der Funktion im Berührpunkt. Ist der Berührpunkt ein Wendepunkt, so spricht man von einer Wendetangente (obwohl gerade diese den Graphen nicht im wörtlichen Sinn berührt, sondern schneidet).

Symmetrie zur y-Achse: Ist der Graph symmetrisch zur y-Achse, dann gilt $f(x) = f(-x)$ für jede Zahl x aus der Definitionsmenge. Man nennt eine solche Funktion *gerade*. Handelt es sich bei $f(x)$ um ein Polynom, dann hat dieses nur gerade Potenzen; die Koeffizienten aller ungeraden Potenzen sind null.

Symmetrie zum Ursprung: Ist der Graph symmetrisch zum Ursprung $(0\,|\,0)$, dann gilt $f(x) = -f(-x)$ für jede Zahl x aus der Definitionsmenge. Eine solche Funktion heißt *ungerade*. Handelt es sich bei $f(x)$ um ein Polynom, dann hat dieses nur ungerade Potenzen; die Koeffizienten aller geraden Potenzen sind null.

Beispiel 3.10 : *Gegeben ist die Funktion* $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. *Gesucht sind ihre Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte, Wendetangenten, Monotonie- und Krümmungs-Intervalle.*

Da wir die Ableitungen der Funktion häufig benötigen, ermitteln wir sie gleich zu Beginn:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x, \\ f''(x) &= 6x - 6, \\ f'''(x) &= 6. \end{aligned}$$

Nullstellen: Wir setzen $f(x) = 0$ und lösen die Gleichung. So erhalten wir alle Werte von x, für die $y = 0$ ist; das sind die Nullstellen. Die erste finden wir mit dem newtonschen Nullstellenverfahren oder durch Probieren; die anderen bekommen wir nach Abspalten des zugehörigen Linearfaktors aus der verbleibenden quadratischen Gleichung:

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + 4 &= 0, \\ x_1 &= -1. \\ (x^3 - 3x^2 + 4) : (x + 1) &= 0, \\ x^2 - 4x + 4 &= 0, \\ x_2 = x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Die Gleichung $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ hat zwei verschiedene Lösungen; die Funktion hat also zwei Nullstellen: $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$. Die zugehörigen Punkte sind:

$$\begin{aligned} N_1 &= (-1 \,|\, 0), \\ N_2 &= (2 \,|\, 0). \end{aligned}$$

Extrempunkte: Wir setzen $f'(x) = 0$ und lösen die Gleichung. So erhalten wir die x-Koordinaten aller Punkte, an denen der Graph horizontale Tangenten hat. Darunter müssen sich alle Extrema finden.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 6x &= 0, \\ x_1 &= 0, \\ x_2 &= 2. \end{aligned}$$

Es kommen also zwei Punkte als Extrema in Frage; deren y-Koordinaten sind die Funktionswerte der x-Koordinaten:

$$\begin{aligned} f(0) &= 4, \\ f(2) &= 0. \end{aligned}$$

Nun prüfen wir für jeden der beiden Punkte, ob es sich um ein Extremum handelt und, wenn ja, um welches:

$$\begin{aligned} f''(0) &= -6 < 0, \\ f''(2) &= 6 > 0. \end{aligned}$$

Der Punkt mit der x-Koordinate 0 ist also ein Hochpunkt, jener mit der x-Koordinate 2 ein Tiefpunkt:

$$\begin{aligned} H &= (0 \,|\, 4), \\ T &= (2 \,|\, 0). \end{aligned}$$

Wendepunkte: Wir setzen $f''(x) = 0$, lösen die Gleichung und erhalten so die x-Koordinaten aller Punkte, die als Wendepunkte in Frage kommen:

$$\begin{aligned} 6x - 6 &= 0, \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Es gibt also einen möglichen Wendepunkt; seine y-Koordinate ergibt sich aus der Funktion:

$$f(1) = 2.$$

Da $f'''(1) = 6 \neq 0$, handelt es sich tatsächlich um einen Wendepunkt:

$$W = (1\,|\,2).$$

Wendetangenten: Da der Graph nur *einen* Wendepunkt W hat, gibt es nur *eine* Wendetangente. Wir schreiben ihre Gleichung in der Form

$$y = kx + d$$

und bestimmen k und d. k ist gleich der Ableitung der Funktion am Wendepunkt:

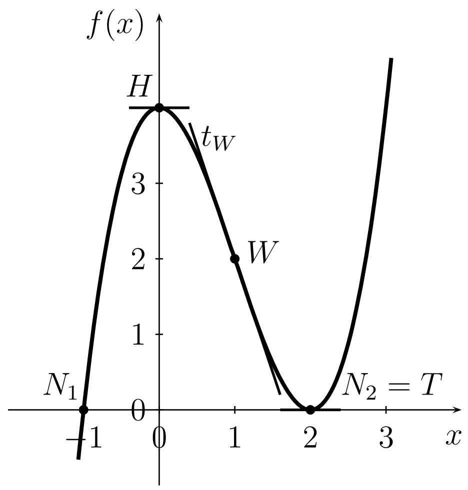
$$k = f'(1) = -3.$$

Da W auf der Wendetangente liegt, erfüllen die Koordinaten von W deren Gleichung. Daraus ergibt sich d:

$$\begin{aligned} 2 &= (-3) \cdot 1 + d, \\ d &= 5. \end{aligned}$$

Die Gleichung der Wendetangente lautet also:

$$y = -3x + 5.$$



Graph von $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. N_1, N_2: Nullstellen; H: Hochpunkt; T: Tiefpunkt; W: Wendepunkt; t_W: Wendetangente.

Monotonie-Intervalle: Die Monotonie-Intervalle ersehen wir aus der Skizze: Links von H ist f streng monoton steigend (da $f'(x) > 0$), zwischen H und T streng monoton fallend (da $f'(x) < 0$), rechts von T streng monoton steigend.

$$f(x) \text{ ist } \begin{cases} \text{streng monoton steigend für } x < 0, \\ \text{streng monoton fallend für } 0 < x < 2, \\ \text{streng monoton steigend für } x > 2. \end{cases}$$

Krümmungs-Intervalle: Auch die Krümmungs-Intervalle zeigt uns die Skizze: Links von W ist f abwärts gekrümmt (da $f''(x) < 0$), rechts von W aufwärts (da $f''(x) > 0$).

$$f(x) \text{ ist } \begin{cases} \text{abwärts gekrümmt für } x < 1, \\ \text{aufwärts gekrümmt für } x > 1. \end{cases}$$

❏

Beispiel 3.11 : *Eine Polynomfunktion vierten Grades hat im Ursprung einen Wendepunkt mit der x-Achse als Tangente; ein weiterer Wendepunkt ist (1|−1). Gesucht ist der Funktionsausdruck. Daneben bestimmen wir noch die Extrema.*

Funktionsausdruck: Wir schreiben die Funktion und ihre Ableitungen mit unbestimmten Koeffizienten $a, b, \cdots$ an:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, \\ f'(x) &= 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d, \\ f''(x) &= 12ax^2 + 6bx + 2c. \end{aligned}$$

Der Funktionsausdruck ist bestimmt, sobald die Werte von a, b, c, d und e gefunden sind. Die Angabe liefert folgende Hinweise:

Der Punkt $(0\,|\,0)$, der Ursprung, liegt auf dem Graphen; bei $x = 0$ ist also $f(x) = 0$.
Der Punkt $(0\,|\,0)$ ist ein Wendepunkt; bei $x = 0$ ist also $f''(x) = 0$.
Der Punkt $(0\,|\,0)$ hat eine horizontale Tangente; bei $x = 0$ ist also $f'(x) = 0$.
Der Punkt $(1\,|\,-1)$ liegt auf dem Graphen; bei $x = 1$ ist also $f(x) = -1$.
Der Punkt $(1\,|\,-1)$ ist ein Wendepunkt; bei $x = 1$ ist also $f''(x) = 0$.

Diese Hinweise führen zu einem linearen Gleichungssystem für die Unbekannten a, b, c, d, e:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 & &\longrightarrow & e &= 0, \\ f''(0) &= 0 & &\longrightarrow & 2c &= 0, \\ f'(0) &= 0 & &\longrightarrow & d &= 0, \\ f(1) &= -1 & &\longrightarrow & a + b + c + d + e &= -1, \\ f''(1) &= 0 & &\longrightarrow & 12a + 6b + 2c &= 0. \end{aligned}$$

Da $c = d = e = 0$, bleibt das Gleichungssystem:

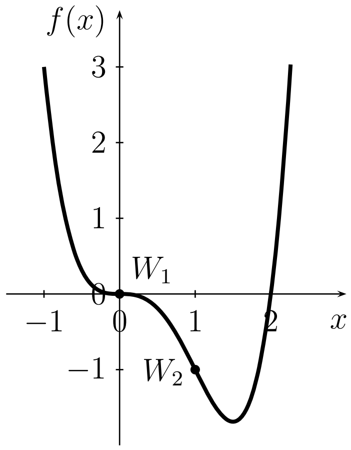
$$\begin{aligned} a + b &= -1, \\ 12a + 6b &= 0 \end{aligned}$$

übrig. Es hat die Lösung:

$$a = 1,$$
$$b = -2.$$

Die gesuchte Funktion ist daher:

$$f(x) = x^4 - 2x^3.$$



Graph von $f(x) = x^4 - 2x^3$. W_1, W_2: die Wendepunkte aus der Angabe.

Extrempunkte: Die Ableitungen der Funktion sind:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2,$$
$$f''(x) = 12x^2 - 12x,$$
$$f'''(x) = 24x - 12.$$

Setzen wir $f'(x) = 0$ und lösen die Gleichung, erhalten wir:

$$x^2(4x - 6) = 0,$$
$$x_1 = 0,$$
$$x_2 = 1.5.$$

Es kommen also zwei Punkte als Extrema in Frage; sie haben die y-Koordinaten:

$$f(0) = 0,$$
$$f(1.5) = -1.6875.$$

Da $f''(1.5) = 9 > 0$, ist der zweite Punkt ein Tiefpunkt. Für den ersten hingegen gilt:

$$f''(0) = 0,$$
$$f'''(0) = -12 \neq 0;$$

er ist daher kein Extremum, sondern ein Horizontalwendepunkt (nämlich W_1).

❏

3.6.3 Extremwertaufgaben

Wir haben gesehen, dass an den Extrempunkten einer Funktion, also dort, wo die Funktion ein lokales Maximum oder Minimum hat, die Steigung der Tangente und damit die erste Ableitung der Funktion null sind. Dies kann man verwenden, um zu berechnen, wie eine Größe gewählt werden muss, damit eine andere Größe ein Minimum oder ein Maximum annimmt. So eine Berechnung nennt man Extremwertaufgabe.

Beispiel 3.12 : *Ein Zaun soll ein rechteckiges Grundstück von 400 m² Fläche abgrenzen. Welche Maße muss das Grundstück haben, damit der Zaun möglichst kurz wird?*

Wir bezeichnen die Länge des Grundstücks mit a, seine Breite mit b, seine Fläche mit A und seinen Umfang mit U. Es geht nun darum, Länge und Breite so zu wählen, dass bei gegebener Fläche der Umfang minimal wird. Dazu muss man entweder die passende Länge oder die passende Breite bestimmen; die jeweils andere Größe ergibt sich daraus, weil ja die Fläche feststeht. Entscheiden wir uns dafür, a zu bestimmen.

Nun müssen wir die zu minimierende Größe U als Funktion der zu bestimmenden Größe a ausdrücken. In einem Rechteck gilt:

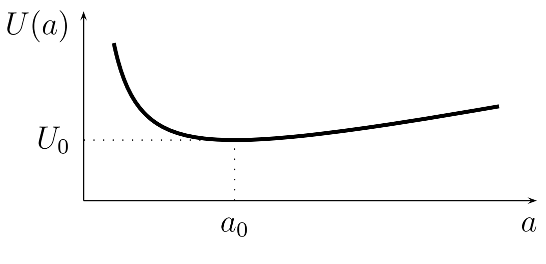
$$U = 2\,(a+b),$$
$$A = a\,b.$$

Aus der zweiten Beziehung, die eine Nebenbedingung darstellt, können wir b ausdrücken:

$$b = \frac{A}{a}\,.$$

Setzen wir dies in die erste Beziehung ein, so erhalten wir U als Funktion von a allein, weil ja A eine Konstante ist:

$$U(a) = 2\left(a + \frac{A}{a}\right).$$



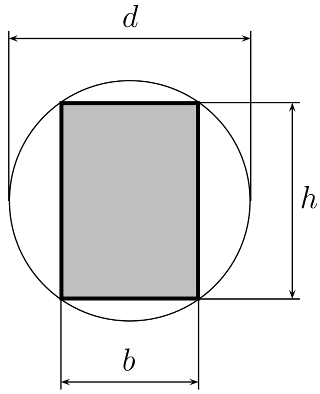
An ihrem Minimum bei a_0 hat die Funktion $U(a)$ eine horizontale Tangente, also ist $U'(a_0) = 0$; der gesuchte Wert von a ergibt sich also aus der Bedingung $U'(a) = 0$:

$$U'(a) = 2\left(1 - \frac{A}{a^2}\right) = 0,$$
$$a = \sqrt{A} = 20 \text{ m}.$$

Da $U''(a) = 4A/a^3 > 0$, ist der Graph von $U(a)$ stets aufwärts gekrümmt und die gefundene Stelle tatsächlich ein Minimum. Nun ist $b = \sqrt{A} = 20$ m; das gesuchte Rechteck ist also ein Quadrat mit 20 m Seitenlänge.

❏

Beispiel 3.13 : *Aus einem Baumstamm mit kreisförmigem Querschnitt von gegebenem Durchmesser soll ein rechteckiger Balken maximaler Tragfähigkeit geschnitten werden. Welche Maße muss er haben?*



Die Tragfähigkeit ist bestimmt durch das Widerstandsmoment

$$W = \frac{bh^2}{6}.$$

Diese Größe soll also maximal werden. Der Durchmesser des Baumstammes ist zugleich Diagonale des Balkenquerschnitts; daraus folgt nach dem Satz von Pythagoras:

$$d^2 = b^2 + h^2.$$

Aus dieser Nebenbedingung drücken wir h^2 aus und setzen den Ausdruck in die Formel für W ein. Wir erhalten W als Funktion von b:

$$W(b) = \frac{b(d^2 - b^2)}{6} = \frac{bd^2 - b^3}{6}.$$

Nun suchen wir die Extrempunkte von W:

$$W'(b) = \frac{d^2 - 3b^2}{6} = 0 \longrightarrow b = \frac{d}{\sqrt{3}}.$$

Für dieses b gilt:

$$W''(b) = -b < 0;$$

folglich ist dort der Graph von W abwärts gekrümmt und W nimmt ein Maximum an. Die zweite Abmessung des Rechtecks ergibt sich aus der Nebenbedingung:

$$h = \sqrt{d^2 - b^2} = d\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

❑

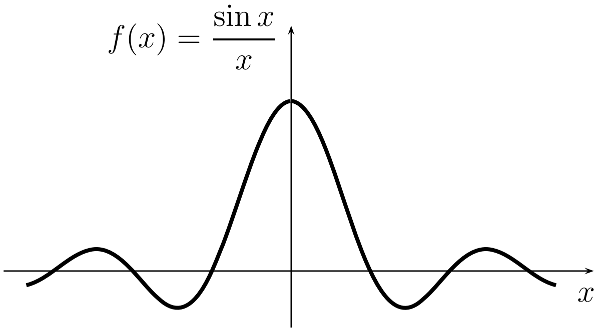
Die Methode liefert nur solche Extrempunkte, an denen die erste Ableitung null ist, also lokale. Um ein *globales* Maximum oder Minimum zu finden, also jene Stelle, an der die Funktion den größten oder kleinsten Wert überhaupt annimmt, muss man die Funktionswerte an den Randstellen des Definitionsbereiches einbeziehen. Zum Beispiel hat die Funktion $x^3 - 3x^2 + 4$ ein lokales Maximum bei $x = 0$; kann aber x von 0 bis 5 variieren, so finden wir den höchsten Funktionswert und damit das globale Maximum bei $x = 5$.

3.6.4 Die Regel von de l'Hospital für unbestimmte Ausdrücke

Die Funktion

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

ist für $x = 0$ nicht definiert, da hier der Zähler null wäre. Andererseits zeigt der Graph der Funktion, dass man ihr auch bei $x = 0$ einen Wert zuschreiben könnte:



Graph der Funktion $\dfrac{\sin x}{x}$. An der Stelle $x = 0$ ist die Funktion nicht definiert.

Wir können also definieren: $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$, falls sich dieser Grenzwert berechnen lässt. Er hat jedoch die Form $\dfrac{0}{0}$, und so ein Ausdruck hat keinen Wert; er ist unbestimmt.

Unbestimmte Ausdrücke sind: $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, $\infty-\infty$.

Berechnen können wir manche von ihnen mit der folgenden Regel von de l'Hospital:

Sind f und g in einer Umgebung von x_0 differenzierbar und ist $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ von der Form $\dfrac{0}{0}$ oder $\dfrac{\infty}{\infty}$, dann gilt: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, falls der letzte Grenzwert existiert.

Beispiel 3.14 : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1.$

❑

Beispiel 3.15 : $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1}{e^x} = 0.$

❑

Beispiel 3.16 : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x.$

Dieser Ausdruck hat die Form $0\cdot\infty$. Im ersten Schritt schreiben wir ihn so, dass die Regel von de l'Hospital anwendbar wird, dann wenden wir die Regel an:

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0.$$

❑

Beispiel 3.17: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$.

Hier wenden wir die Regel zweimal an, da nach dem ersten Anwenden wieder ein unbestimmter Ausdruck vorliegt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

❑

Beispiel 3.18: $\lim\limits_{x\to 0} x^x$.

Dies ist ein Ausdruck vom Typ 0^0. Wir bringen ihn in eine geeignete Form:

$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} (e^{\ln x})^x = \lim_{x\to 0} e^{x\ln x}.$$

Da e^x stetig ist, dürfen wir Funktion und Grenzwert vertauschen:

$$\lim_{x\to 0} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0}(x\ln x)} = e^0 = 1.$$

(Den Grenzwert von $x\ln x$ kennen wir aus Beispiel 3.16.)

❑

8 SACHREGISTER

A

B

C

D

E

F

G

H

I