

Wolfgang Tschirk

MATHE – Matura  
Band 3: HTL

Ergänzungen für  
berufsbildende höhere Schulen der Technik

*( Inhaltsverzeichnis und Sachregister;  
und dazwischen zum Probelesen  
das Kapitel "Differentialrechnung" )*

Dieses Skriptum soll Schülerinnen und Schülern berufsbildender höherer Schulen der Technik bei ihrer Maturavorbereitung helfen. Es enthält den Maturastoff, soweit er die Mathematik allgemeinbildender höherer Schulen übersteigt, und ergänzt somit den Band 1 dieser Reihe. Für die Statistik gibt es mit Band 4 ein eigenes Skriptum.

Ich wünsche Ihnen/dir viel Erfolg!  
Wolfgang Tschirk

## MATHE – Matura

|                   |  |
|-------------------|--|
| Band 1: AHS       | Grundlagen für allgemeinbildende höhere Schulen              |
| Band 2: HAK       | Ergänzungen für berufsbildende höhere Schulen der Wirtschaft |
| Band 3: HTL       | Ergänzungen für berufsbildende höhere Schulen der Technik    |
| Band 4: Statistik | Statistik für berufsbildende höhere Schulen                  |

1. Auflage 2011-06-01

© 2011

Mag. Wolfgang Tschirk

Mathematik und Physik für Schüler und Studenten

Wien, Österreich

[www.mathecampus.at](http://www.mathecampus.at)

# Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>KOMPLEXE ZAHLEN</b>  | <b>3</b>  |
| 1.1      | Wozu komplexe Zahlen? . . . . .                                 | 3         |
| 1.2      | Darstellung komplexer Zahlen . . . . .                          | 3         |
| 1.3      | Rechnen mit komplexen Zahlen . . . . .                          | 5         |
| 1.4      | Funktionen komplexer Zahlen . . . . .                           | 6         |
| 1.4.1    | Exponentialfunktion . . . . .                                   | 6         |
| 1.4.2    | Logarithmus . . . . .   | 6         |
| 1.4.3    | Winkelfunktionen . . . . .                                      | 6         |
| 1.5      | Beispiele . . . . .   | 7         |
| <b>2</b> | <b>GLEICHUNGEN</b>  | <b>9</b>  |
| 2.1      | Algebraische Gleichungen . . . . .                              | 9         |
| 2.1.1    | Lineare und quadratische Gleichungen . . . . .                  | 9         |
| 2.1.2    | Gleichungen höheren Grades . . . . .                            | 10        |
| 2.2      | Transzendente Gleichungen . . . . .                             | 10        |
| 2.2.1    | Wurzelgleichungen . . . . .                                     | 10        |
| 2.2.2    | Exponentialgleichungen . . . . .                                | 11        |
| 2.2.3    | Logarithmische Gleichungen . . . . .                            | 12        |
| 2.2.4    | Goniometrische Gleichungen . . . . .                            | 14        |
| 2.2.5    | Gleichungen mit Hyperbelfunktionen . . . . .                    | 15        |
| <b>3</b> | <b>DIFFERENTIALRECHNUNG</b>                                     | <b>16</b> |
| 3.1      | Steigung der Tangente . . . . .                                 | 16        |
| 3.2      | Erste Ableitung . . . . .                                       | 16        |
| 3.3      | Ableitungsregeln . . . . .                                      | 17        |
| 3.4      | Höhere Ableitungen . . . . .                                    | 18        |
| 3.5      | Methoden für nicht-explizite Funktionen . . . . .               | 19        |
| 3.5.1    | Implizite Ableitung . . . . .                                   | 19        |
| 3.5.2    | Ableitung der Umkehrfunktion . . . . .                          | 19        |
| 3.5.3    | Ableitung von Funktionen in Parameterdarstellung . . . . .      | 20        |
| 3.6      | Anwendungen der Differentialrechnung . . . . .                  | 21        |
| 3.6.1    | Newtonsches Nullstellenverfahren . . . . .                      | 21        |
| 3.6.2    | Funktionsuntersuchungen . . . . .                               | 23        |
| 3.6.3    | Extremwertaufgaben . . . . .                                    | 28        |
| 3.6.4    | Die Regel von de l'Hospital für unbestimmte Ausdrücke . . . . . | 30        |
| <b>4</b> | <b>INTEGRALRECHNUNG</b>   | <b>32</b> |
| 4.1      | Fläche unter dem Graphen . . . . .                              | 32        |
| 4.2      | Stammfunktion . . . . .   | 32        |
| 4.3      | Integrationsregeln . . . . .                                    | 33        |
| 4.4      | Integrieren mit Substitution . . . . .                          | 35        |
| 4.4.1    | Unbestimmtes Integral . . . . .                                 | 35        |
| 4.4.2    | Bestimmtes Integral . . . . .                                   | 37        |
| 4.5      | Partielles Integrieren . . . . .                                | 38        |
| 4.6      | Integrieren mit Partialbruchzerlegung . . . . .                 | 40        |
| 4.7      | Uneigentliche Integrale . . . . .                               | 42        |
| 4.7.1    | Uneigentliche Integrale 1. Art . . . . .                        | 42        |

---

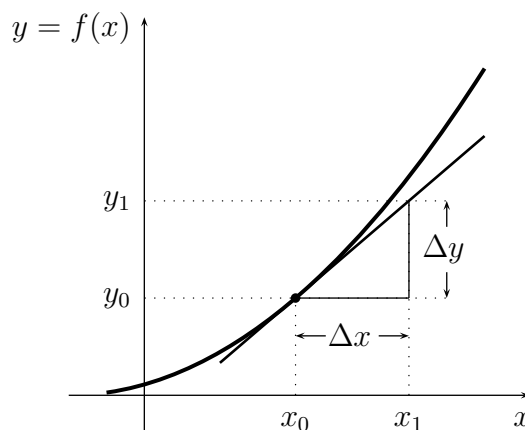
|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 4.7.2    | Uneigentliche Integrale 2. Art . . . . .                                  | 43        |
| 4.8      | Numerisches Integrieren . . . . .   | 44        |
| 4.8.1    | Integrieren mit Rechtecknäherung . . . . .                                | 44        |
| 4.8.2    | Integrieren mit der Simpson-Formel . . . . .                              | 45        |
| 4.9      | Anwendungen des Integrals . . . . .                                       | 46        |
| <b>5</b> | <b>UNENDLICHE REIHEN</b>  | <b>47</b> |
| 5.1      | Konvergenz und Divergenz . . . . .  | 47        |
| 5.2      | Konvergenzkriterien . . . . .   | 49        |
| 5.3      | Potenzreihen . . . . .  | 51        |
| 5.4      | McLaurin- und Taylor-Reihen . . . . .                                     | 52        |
| 5.5      | Fourier-Reihen . . . . .  | 57        |
| <b>6</b> | <b>LAPLACE-TRANSFORMATION</b>   | <b>59</b> |
| 6.1      | Die Laplace-Transformierte . . . . .                                      | 59        |
| 6.2      | Transformationsregeln . . . . .   | 60        |
| <b>7</b> | <b>DIFFERENTIALGLEICHUNGEN</b>  | <b>62</b> |
| 7.1      | Was ist eine Differentialgleichung? . . . . .                             | 62        |
| 7.2      | Beispiel: Exponentielles Wachstum . . . . .                               | 63        |
| 7.3      | Differentialgleichungen erster Ordnung mit trennbaren Variablen . . . . . | 64        |
| 7.4      | Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .                  | 67        |
| 7.5      | Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .    | 70        |
| 7.5.1    | Gleichungen erster Ordnung . . . . .                                      | 70        |
| 7.5.2    | Gleichungen zweiter Ordnung . . . . .                                     | 72        |
| 7.5.3    | Anfangswertaufgaben und Laplace-Transformation . . . . .                  | 79        |
| <b>8</b> | <b>SACHREGISTER</b>   | <b>81</b> |

## 3 DIFFERENTIALRECHNUNG

### 3.1 Steigung der Tangente

Betrachten wir eine reelle Funktion  $y = f(x)$  und darin einen Punkt  $(x_0 | y_0)$  mit  $y_0 = f(x_0)$ . Wie ändert sich  $y$ , wenn sich  $x$  um einen kleinen Betrag ändert? Je stärker sich  $y$  ändert, desto steiler verläuft der Graph der Funktion an der Stelle  $x_0$ . Die Stärke der Änderung kann also durch die Steigung der Tangente im Punkt  $(x_0 | y_0)$  ausgedrückt werden. Wählen wir zwei beliebige Punkte der Tangente, etwa  $(x_0 | y_0)$  und  $(x_1 | y_1)$ , dann ist die Steigung  $k$  der Tangente gegeben durch:

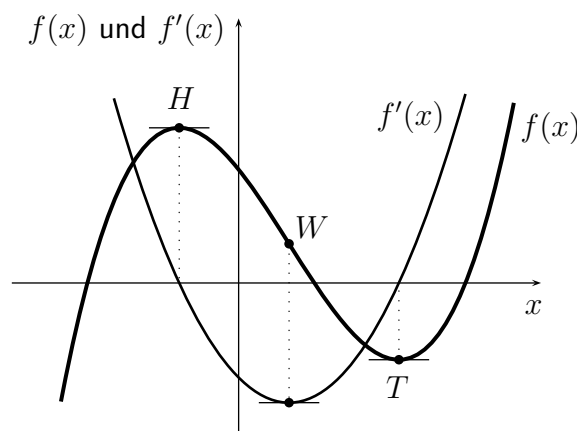
$$k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$



Die Steigung der Tangente an den Graphen von  $f(x)$  im Punkt  $(x_0 | y_0)$  ist ein Maß für die Änderung der Funktion an dieser Stelle.

### 3.2 Erste Ableitung

Jedem Punkt, der eine Tangente besitzt, kann eine Steigung zugeordnet werden. Ordnet man die Steigung dem  $x$ -Wert des Punktes zu, so entsteht eine neue Funktion: die erste Ableitung  $f'(x)$  der Funktion  $f(x)$ .



Graphen einer Funktion  $f(x)$  und ihrer ersten Ableitung  $f'(x)$ . An den lokalen Extrempunkten  $H$  und  $T$  ist die Tangente horizontal; dort ist also ihre Steigung null:  $f'(x) = 0$ . Am Wendepunkt  $W$  hat die Steigung selbst einen Extremwert.

### 3.3 Ableitungsregeln

Die erste Ableitung (kurz: die Ableitung)  $f'(x)$  einer Funktion  $f(x)$  kann man berechnen als

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Für die "unendlich kleinen" Differenzen der  $x$ - und  $y$ -Werte, die sich in Zähler und Nenner ergeben, wenn man den Grenzwert bildet, schreibt man auch  $dx$  und  $dy$ , und daher:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

(man liest: "dy nach dx" und nennt diese Größe den Differentialquotienten). Das Berechnen der Ableitung nennt man differenzieren. In der Praxis verwendet man dazu fertige Rechenregeln, die auf dem Grenzwert basieren, aber die Grenzwertbildung nicht mehr erfordern.

Ableitungen einiger wichtiger Funktionen ( $k, q \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^+$ ):

|                            |   |
|----------------------------|---|
| $(k)' = 0$                 | Konstante Funktion:<br>$f(x) = 3 \rightarrow f'(x) = 0$ ; anders geschrieben: $(3)' = 0$ .                                    |
| $(x^q)' = q \cdot x^{q-1}$ | Potenzfunktion:<br>$(x)' = 1, (x^3)' = 3x^2, (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ . |
| $(e^x)' = e^x$             | Exponentialfunktion   |
| $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ | Exponentialfunktion:<br>$(10^x)' = 10^x \ln 10, (2.3^x)' = 2.3^x \ln 2.3$ .   |
| $(\ln x)' = \frac{1}{x}$   | Logarithmusfunktion   |
| $(\sin x)' = \cos x$       | Sinusfunktion   |
| $(\cos x)' = -\sin x$      | Cosinusfunktion   |
| $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$ | Tangensfunktion   |

Ableitungen einiger wichtiger Funktionsverknüpfungen ( $k \in \mathbb{R}$ ):

|                             |  |
|-----------------------------|--|
| $(k \cdot f)' = k \cdot f'$ | Ableitung des Vielfachen = Vielfaches der Ableitung:<br>$(3x^2)' = 3 \cdot (x^2)' = 3 \cdot 2x = 6x$ . |
| $(f + g)' = f' + g'$        | Ableitung der Summe = Summe der Ableitungen:<br>$(x^3 + x^2)' = (x^3)' + (x^2)' = 3x^2 + 2x$ .         |
| $(f - g)' = f' - g'$        | Ableitung der Differenz = Differenz der Ableitungen:<br>$(x^3 - x^2)' = (x^3)' - (x^2)' = 3x^2 - 2x$ . |

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Produktregel:

$$(x^2 \cdot \sin x)' = (x^2)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Quotientenregel:

$$\left(\frac{x^2}{\sin x}\right)' = \frac{(x^2)' \cdot \sin x - x^2 \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{2x \sin x - x^2 \cos x}{\sin^2 x}.$$

$$(f^g)' = f^g \cdot \left(g' \cdot \ln f + g \cdot \frac{f'}{f}\right)$$

Potenzregel:

$$(x^x)' = x^x \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x (\ln x + 1).$$

$$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Kettenregel:

$$(\sin x^2)' = (\sin' x^2) \cdot (x^2)' = (\cos x^2) \cdot 2x.$$

Nicht jede Funktion besitzt an jeder Stelle eine Tangente. Wo der Funktionswert springt oder der Graph eine Ecke hat, gibt es keine Tangente; dort ist die Funktion nicht differenzierbar.

Nirgends differenzierbar ist beispielsweise die Funktion  $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

### 3.4 Höhere Ableitungen

Da die erste Ableitung einer Funktion wieder eine Funktion ist, kann man eventuell auch sie ableiten und erhält die zweite Ableitung  $f''$ . Leitet man diese ab, gelangt man zur dritten Ableitung usw. Man schreibt  $f'$ ,  $f''$ ,  $f'''$ , ... oder allgemein  $f^{(k)}$  für die  $k$ -te Ableitung.

**Beispiel 3.1:** Die ersten drei Ableitungen von  $f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{2} + 1$ .

$$f'(x) = \frac{x^2}{2} - 3x,$$

$$f''(x) = x - 3,$$

$$f'''(x) = 1.$$

□

**Beispiel 3.2:** Die ersten drei Ableitungen von  $f(x) = \sin x^2$ .

$$f'(x) = 2x \cos x^2,$$

$$f''(x) = 2 \cos x^2 - 4x^2 \sin x^2,$$

$$f'''(x) = -12x \sin x^2 - 8x^3 \cos x^2.$$

□

Die erste Ableitung haben wir als Steigung der Tangente an den Graphen kennen gelernt. Die zweite Ableitung hängt mit der Krümmung des Graphen zusammen: Ist  $f''(x_0) > 0$ , dann ist der Graph an der Stelle  $x_0$  aufwärts gekrümmt, bei  $f''(x_0) < 0$  abwärts, bei  $f''(x_0) = 0$  gar nicht. Die höheren Ableitungen ab der dritten haben weniger anschauliche Bedeutungen.

### 3.5 Methoden für nicht-explizite Funktionen

Oft will man  $dy/dx$  ermitteln, hat aber  $y$  nicht in der Form  $y = f(x)$ , also explizit, gegeben. Die drei wichtigsten Fälle besprechen wir in diesem Abschnitt.

#### 3.5.1 Implizite Ableitung

Ist  $y$  implizit durch eine Beziehung  $g(x, y) = 0$  gegeben, so kann man  $y'$  direkt aus dieser Beziehung ermitteln. Dazu leitet man sie nach  $x$  ab:  $(g(x, y))' = 0$ ; da  $y$  eine Funktion von  $x$  ist, erfordern die Ableitungen der  $y$ -Ausdrücke die Kettenregel.

**Beispiel 3.3:** Steigung der Tangente an den Kreis  $x^2 + y^2 = r^2$ .

Wir leiten die Kreisgleichung ab und rechnen  $y'$  aus:

$$2x + 2yy' = 0 \longrightarrow y' = -\frac{x}{y}.$$

□

**Beispiel 3.4:** Gesucht ist  $y'$  aus der Beziehung  $x^2 - y \ln y = 0$ .

Im vorigen Beispiel hätten wir  $y$  auch explizit ausdrücken können ( $y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$ ) und dann nach gewohnter Art ableiten. Nun aber könnten wir, selbst wenn wir wollten,  $y$  nicht explizit darstellen. Mit impliziter Ableitung erhalten wir:

$$2x - (y' \ln y + y \frac{1}{y} y') = 0 \longrightarrow y' = \frac{2x}{\ln y + 1}.$$

□

#### 3.5.2 Ableitung der Umkehrfunktion

Hat  $f$  eine Umkehrfunktion  $g$ , gilt also mit  $y = f(x)$  auch  $x = g(y)$ , und sind die Ableitungen der beiden Funktionen ungleich null, dann gilt:

$$f'(x) \cdot g'(y) = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1.$$

So kann man eine Funktion ableiten, die zwar nicht selbst explizit darstellbar ist, deren Umkehrfunktion aber explizit gemacht werden kann.

**Beispiel 3.5:** Gesucht ist  $y'$  aus der Beziehung  $x^2 - y \ln y = 0$  (wie Beispiel 3.4).

Wir können zwar  $y$  nicht explizit ausdrücken, wohl aber  $x$ :

$$x = \pm \sqrt{y \ln y}.$$

Nun verwenden wir die Ableitung dieser Umkehrfunktion:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\pm \frac{\ln y + 1}{2\sqrt{y \ln y}}} = \pm \frac{2\sqrt{y \ln y}}{\ln y + 1} = \frac{2x}{\ln y + 1}.$$

□



**Beispiel 3.6:** Die Ableitungen der Arcusfunktionen.

$y = \arcsin x$  bedeutet  $x = \sin y$ , und Analoges gilt für  $\arccos x$  und  $\arctan x$ . Daraus folgt:

$$\begin{aligned}(\arcsin x)' &= \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \\(\arccos x)' &= \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{1}{-\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \\(\arctan x)' &= \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.\end{aligned}$$

□

### 3.5.3 Ableitung von Funktionen in Parameterdarstellung

Sind  $x$  und  $y$  als Funktionen einer dritten Größe (eines Parameters)  $t$  gegeben, also  $x(t)$  und  $y(t)$ , so kann man  $dy/dx$  berechnen, ohne zuvor  $y$  als Funktion von  $x$  darzustellen. Bezeichnen wir die Ableitungen nach dem Parameter mit einem Punkt, so gilt:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

**Beispiel 3.7:** Steigung der Tangente an den Kreis  $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ .

Hier ist der Radius  $r$  eine Konstante und der Winkel  $\varphi$  der Parameter.

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{r \cos \varphi}{-r \sin \varphi} = -\frac{x}{y}.$$

Natürlich haben wir dasselbe Resultat erhalten wie in Beispiel 3.3.

□

**Beispiel 3.8:** Wie ändert sich beim freien Fall die Geschwindigkeit mit dem Weg?

Geschwindigkeit  $v$  und Weg  $s$  hängen beim freien Fall von der Zeit  $t$  ab:

$$\begin{aligned}v &= gt, \\s &= \frac{g}{2} t^2,\end{aligned}$$

wobei  $g$  für die Erdbeschleunigung steht. Es folgt:

$$\frac{dv}{ds} = \frac{\dot{v}}{\dot{s}} = \frac{g}{gt} = \frac{gt}{gt^2} = \frac{v}{2s}.$$

□

## 3.6 Anwendungen der Differentialrechnung

### 3.6.1 Newtonsches Nullstellenverfahren

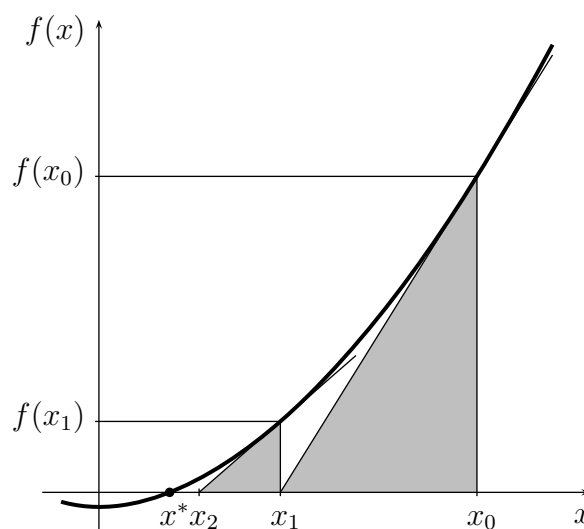
Viele Gleichungen kann man nicht geschlossen lösen, das heißt, man kann keine Formel angeben, in der die Lösung als Funktion der Koeffizienten erscheinen würde. In solchen Fällen greift man zu Näherungsverfahren. Das wohl gebräuchlichste nimmt die Differentialrechnung zu Hilfe. Wir werden es in diesem Abschnitt besprechen.

Die Gleichung

$$f(x) = 0$$

lösen heißt: alle  $x$ -Werte finden, für die die Gleichung stimmt, also alle Nullstellen der Funktion  $f(x)$  ermitteln. Während geschlossene Lösungen meist alle Nullstellen auf einmal liefern, kann man mit einem Näherungsverfahren nur eine Nullstelle nach der anderen bestimmen. Wie viele Nullstellen eine Funktion hat, erfährt man durch ein Näherungsverfahren nicht.

Um mit dem newtonschen Verfahren eine Nullstelle  $x^*$  von  $f(x)$  zu finden, gehen wir vor wie folgt: Wir wählen einen Startwert  $x_0$ , bestimmen dessen Funktionswert  $f(x_0)$  und legen im Punkt  $(x_0|f(x_0))$  die Tangente an den Graphen von  $f$ . Ist  $x_0$  nicht gerade unglücklich gewählt, so liegt die Nullstelle der Tangente, wir nennen sie  $x_1$ , näher bei  $x^*$ , als  $x_0$  dies tut. Mit  $x_1$  wiederholen wir den Vorgang: bestimmen  $f(x_1)$ , legen die Tangente in  $(x_1|f(x_1))$  und erhalten eine neue, noch bessere Näherung  $x_2$ . Dies machen wir so lange, bis  $x^*$  mit der gewünschten Genauigkeit gefunden ist.



Newtonsches Nullstellenverfahren.  $x^*$ : Nullstelle;  $x_0$ : Startwert;  $x_1, x_2$ : Näherungswerte für  $x^*$  nach der ersten und zweiten Iteration.

Die schattierten Dreiecke zeigen die Tangentensteigungen an den Stellen  $x_k$ :

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}, \quad f'(x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2}, \quad \dots \quad \longrightarrow \quad f'(x_k) = \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}}.$$

Aus der letzten Beziehung drücken wir  $x_{k+1}$  aus und erhalten eine Formel für die Iteration: Hat man eine Näherung  $x_k$ , so gewinnt man die folgende Näherung durch:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

**Beispiel 3.9:** Wir suchen eine Nullstelle der Funktion  $f(x) = \ln x + x$ .

Wir bilden zunächst die Ableitung von  $f$ :

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 1.$$

Als Startwert wählen wir:

$$x_0 = 1.$$

Die ersten drei Iterationen ergeben:

$$x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{1}{2} = 0.5,$$

$$x_2 = 0.5 - \frac{f(0.5)}{f'(0.5)} = 0.5 - \frac{-0.19315}{3} = 0.56438.$$

$$x_3 = 0.56438 - \frac{f(0.56438)}{f'(0.56438)} = 0.56438 - \frac{-0.00764}{2.77185} = 0.56714.$$

Dieser Wert stimmt mit der richtigen Nullstelle bis zur fünften Dezimalstelle überein, und der zugehörige Funktionswert unterscheidet sich erst in der fünften Dezimalstelle von null.

Wir fassen den Rechengang in einer Tabelle zusammen:

| $k$ | $x_k$   | $f(x_k)$ | $f'(x_k)$ |
|-----|---------|----------|-----------|
| 0   | 1.00000 | 1.00000  | 2.00000   |
| 1   | 0.50000 | -0.19315 | 3.00000   |
| 2   | 0.56438 | -0.00764 | 2.77185   |
| 3   | 0.56714 | -0.00001 | 2.76324   |
| 4   | 0.56714 | 0.00000  | 2.76322   |

Die Lösung lautet also:

$$x^* = 0.56714.$$

Sie kann beliebig genau bestimmt werden, wobei sich die Anzahl der richtigen Stellen mit jeder Iteration etwa verdoppelt. □

Nicht immer ist  $x_{k+1}$  ein besserer Näherungswert als  $x_k$ . Wenn im betrachteten Bereich die Funktion stark gekrümmt ist, ihre Werte weit von null abweichen oder ihre Steigung gering ist, kann das Verfahren sogar scheitern. Damit man eine Nullstelle findet, muss im Intervall, das die Nullstelle und alle Näherungswerte enthält, die Bedingung:

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1$$

erfüllt sein.

### 3.6.2 Funktionsuntersuchungen

Beim Untersuchen von Funktionen gibt es zwei Grundaufgaben:

- 1) Gegeben ist der Funktionsausdruck, gesucht sind Eigenschaften der Funktion.
- 2) Gegeben sind Eigenschaften der Funktion, gesucht ist der Funktionsausdruck.

Wir besprechen zunächst die wichtigsten Eigenschaften von Funktionen und rechnen dann für jede der Grundaufgaben ein Beispiel.

Wesentliche Eigenschaften einer Funktion  $y = f(x)$  sind:

**Nullstellen:** jene Stellen, wo  $y$  den Wert null annimmt. Für Nullstellen gilt daher  $f(x) = 0$ .

**Extrempunkte:** Hoch- und Tiefpunkte (lokale Maxima und Minima). An Extrempunkten hat der Funktionsgraph horizontale Tangenten, also die Steigung null. Für Extrempunkte gilt daher  $f'(x) = 0$ . Gilt zusätzlich  $f''(x) < 0$ , dann liegt ein Hochpunkt vor, bei  $f''(x) > 0$  ein Tiefpunkt. Ist hingegen  $f''(x) = 0$ , dann hängt die Art des Punktes von den höheren Ableitungen ab; oft handelt es sich um einen Horizontalwendepunkt (auch Treppenknoten, Terrassenpunkt oder – irreführend – Sattelpunkt genannt).

**Wendepunkte:** jene Punkte, an denen sich die Krümmungsrichtung des Graphen ändert. Dort hat die Steigung einen Extremwert. Für Wendepunkte gilt daher  $f''(x) = 0$ . Ist zusätzlich  $f'''(x) \neq 0$ , so liegt sicher ein Wendepunkt vor. Falls  $f'''(x) = 0$ , dann sagen erst die höheren Ableitungen, ob es sich um einen Wendepunkt handelt.

**Monotonie-Intervalle:** Abschnitte auf der  $x$ -Achse, in denen das Vorzeichen von  $f'(x)$  gleich bleibt.

**Krümmungs-Intervalle:** Abschnitte auf der  $x$ -Achse, in denen das Vorzeichen von  $f''(x)$  gleich bleibt.

**Tangenten:** Gerade, die den Graphen berühren. Tangenten haben mit dem Graphen den Berührungspunkt gemeinsam, und ihre Steigung ist gleich der Ableitung der Funktion im Berührungspunkt. Ist der Berührungspunkt ein Wendepunkt, so spricht man von einer Wendetangente (obwohl gerade diese den Graphen nicht im wörtlichen Sinn berührt, sondern schneidet).

**Symmetrie zur  $y$ -Achse:** Ist der Graph symmetrisch zur  $y$ -Achse, dann gilt  $f(x) = f(-x)$  für jede Zahl  $x$  aus der Definitionsmenge. Man nennt eine solche Funktion *gerade*. Handelt es sich bei  $f(x)$  um ein Polynom, dann hat dieses nur gerade Potenzen; die Koeffizienten aller ungeraden Potenzen sind null.

**Symmetrie zum Ursprung:** Ist der Graph symmetrisch zum Ursprung  $(0|0)$ , dann gilt  $f(x) = -f(-x)$  für jede Zahl  $x$  aus der Definitionsmenge. Eine solche Funktion heißt *ungerade*. Handelt es sich bei  $f(x)$  um ein Polynom, dann hat dieses nur ungerade Potenzen; die Koeffizienten aller geraden Potenzen sind null.

**Beispiel 3.10:** Gegeben ist die Funktion  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ . Gesucht sind ihre Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte, Wendetangenten, Monotonie- und Krümmungs-Intervalle.

Da wir die Ableitungen der Funktion häufig benötigen, ermitteln wir sie gleich zu Beginn:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x,$$

$$f''(x) = 6x - 6,$$

$$f'''(x) = 6.$$

**Nullstellen:** Wir setzen  $f(x) = 0$  und lösen die Gleichung. So erhalten wir alle Werte von  $x$ , für die  $y = 0$  ist; das sind die Nullstellen. Die erste finden wir mit dem newtonschen Nullstellenverfahren oder durch Probieren; die anderen bekommen wir nach Abspalten des zugehörigen Linearfaktors aus der verbleibenden quadratischen Gleichung:

$$x^3 - 3x^2 + 4 = 0,$$

$$x_1 = -1.$$

$$(x^3 - 3x^2 + 4) : (x + 1) = 0,$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0,$$

$$x_2 = x_3 = 2.$$

Die Gleichung  $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$  hat zwei verschiedene Lösungen; die Funktion hat also zwei Nullstellen:  $x_1 = -1$  und  $x_2 = 2$ . Die zugehörigen Punkte sind:

$$N_1 = (-1 | 0),$$

$$N_2 = (2 | 0).$$

**Extrempunkte:** Wir setzen  $f'(x) = 0$  und lösen die Gleichung. So erhalten wir die  $x$ -Koordinaten aller Punkte, an denen der Graph horizontale Tangenten hat. Darunter müssen sich alle Extrema finden.

$$3x^2 - 6x = 0,$$

$$x_1 = 0,$$

$$x_2 = 2.$$

Es kommen also zwei Punkte als Extrema in Frage; deren  $y$ -Koordinaten sind die Funktionswerte der  $x$ -Koordinaten:

$$f(0) = 4,$$

$$f(2) = 0.$$

Nun prüfen wir für jeden der beiden Punkte, ob es sich um ein Extremum handelt und, wenn ja, um welches:

$$f''(0) = -6 < 0,$$

$$f''(2) = 6 > 0.$$

Der Punkt mit der  $x$ -Koordinate 0 ist also ein Hochpunkt, jener mit der  $x$ -Koordinate 2 ein Tiefpunkt:

$$H = (0 | 4),$$

$$T = (2 | 0).$$

**Wendepunkte:** Wir setzen  $f''(x) = 0$ , lösen die Gleichung und erhalten so die  $x$ -Koordinaten aller Punkte, die als Wendepunkte in Frage kommen:

$$\begin{aligned} 6x - 6 &= 0, \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Es gibt also einen möglichen Wendepunkt; seine  $y$ -Koordinate ergibt sich aus der Funktion:

$$f(1) = 2.$$

Da  $f'''(1) = 6 \neq 0$ , handelt es sich tatsächlich um einen Wendepunkt:

$$W = (1 \mid 2).$$

**Wendetangenten:** Da der Graph nur *einen* Wendepunkt  $W$  hat, gibt es nur *eine* Wendetangente. Wir schreiben ihre Gleichung in der Form

$$y = kx + d$$

und bestimmen  $k$  und  $d$ .  $k$  ist gleich der Ableitung der Funktion am Wendepunkt:

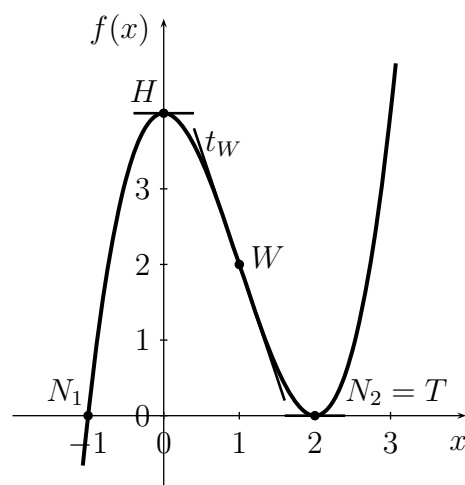
$$k = f'(1) = -3.$$

Da  $W$  auf der Wendetangente liegt, erfüllen die Koordinaten von  $W$  deren Gleichung. Daraus ergibt sich  $d$ :

$$\begin{aligned} 2 &= (-3) \cdot 1 + d, \\ d &= 5. \end{aligned}$$

Die Gleichung der Wendetangente lautet also:

$$y = -3x + 5.$$



Graph von  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ .  $N_1, N_2$ : Nullstellen;  $H$ : Hochpunkt;  $T$ : Tiefpunkt;  $W$ : Wendepunkt;  $t_W$ : Wendetangente.

**Monotonie-Intervalle:** Die Monotonie-Intervalle ersehen wir aus der Skizze: Links von  $H$  ist  $f$  streng monoton steigend (da  $f'(x) > 0$ ), zwischen  $H$  und  $T$  streng monoton fallend (da  $f'(x) < 0$ ), rechts von  $T$  streng monoton steigend.

$$f(x) \text{ ist } \begin{cases} \text{streng monoton steigend für } x < 0, \\ \text{streng monoton fallend für } 0 < x < 2, \\ \text{streng monoton steigend für } x > 2. \end{cases}$$

**Krümmungs-Intervalle:** Auch die Krümmungs-Intervalle zeigt uns die Skizze: Links von  $W$  ist  $f$  abwärts gekrümmt (da  $f''(x) < 0$ ), rechts von  $W$  aufwärts (da  $f''(x) > 0$ ).

$$f(x) \text{ ist } \begin{cases} \text{abwärts gekrümmt für } x < 1, \\ \text{aufwärts gekrümmt für } x > 1. \end{cases}$$

□

**Beispiel 3.11:** Eine Polynomfunktion vierten Grades hat im Ursprung einen Wendepunkt mit der  $x$ -Achse als Tangente; ein weiterer Wendepunkt ist  $(1|-1)$ . Gesucht ist der Funktionsausdruck. Daneben bestimmen wir noch die Extrema.

**Funktionsausdruck:** Wir schreiben die Funktion und ihre Ableitungen mit unbestimmten Koeffizienten  $a, b, \dots$  an:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, \\ f'(x) &= 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d, \\ f''(x) &= 12ax^2 + 6bx + 2c. \end{aligned}$$

Der Funktionsausdruck ist bestimmt, sobald die Werte von  $a, b, c, d$  und  $e$  gefunden sind. Die Angabe liefert folgende Hinweise:

Der Punkt  $(0|0)$ , der Ursprung, liegt auf dem Graphen; bei  $x = 0$  ist also  $f(x) = 0$ .

Der Punkt  $(0|0)$  ist ein Wendepunkt; bei  $x = 0$  ist also  $f''(x) = 0$ .

Der Punkt  $(0|0)$  hat eine horizontale Tangente; bei  $x = 0$  ist also  $f'(x) = 0$ .

Der Punkt  $(1|-1)$  liegt auf dem Graphen; bei  $x = 1$  ist also  $f(x) = -1$ .

Der Punkt  $(1|-1)$  ist ein Wendepunkt; bei  $x = 1$  ist also  $f''(x) = 0$ .

Diese Hinweise führen zu einem linearen Gleichungssystem für die Unbekannten  $a, b, c, d, e$ :

$$\begin{aligned} f(0) = 0 &\longrightarrow e = 0, \\ f''(0) = 0 &\longrightarrow 2c = 0, \\ f'(0) = 0 &\longrightarrow d = 0, \\ f(1) = -1 &\longrightarrow a + b + c + d + e = -1, \\ f''(1) = 0 &\longrightarrow 12a + 6b + 2c = 0. \end{aligned}$$

Da  $c = d = e = 0$ , bleibt das Gleichungssystem:

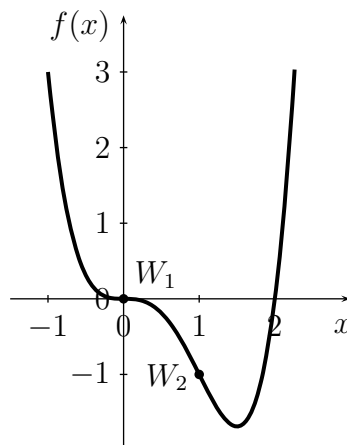
$$\begin{aligned} a + b &= -1, \\ 12a + 6b &= 0 \end{aligned}$$

übrig. Es hat die Lösung:

$$\begin{aligned} a &= 1, \\ b &= -2. \end{aligned}$$

Die gesuchte Funktion ist daher:

$$f(x) = x^4 - 2x^3.$$



Graph von  $f(x) = x^4 - 2x^3$ .  $W_1, W_2$ : die Wendepunkte aus der Angabe.

**Extrempunkte:** Die Ableitungen der Funktion sind:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 6x^2, \\ f''(x) &= 12x^2 - 12x, \\ f'''(x) &= 24x - 12. \end{aligned}$$

Setzen wir  $f'(x) = 0$  und lösen die Gleichung, erhalten wir:

$$\begin{aligned} x^2(4x - 6) &= 0, \\ x_1 &= 0, \\ x_2 &= 1.5. \end{aligned}$$

Es kommen also zwei Punkte als Extrema in Frage; sie haben die  $y$ -Koordinaten:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f(1.5) &= -1.6875. \end{aligned}$$

Da  $f''(1.5) = 9 > 0$ , ist der zweite Punkt ein Tiefpunkt. Für den ersten hingegen gilt:

$$\begin{aligned} f''(0) &= 0, \\ f'''(0) &= -12 \neq 0; \end{aligned}$$

er ist daher kein Extremum, sondern ein Horizontalwendepunkt (nämlich  $W_1$ ).

□



### 3.6.3 Extremwertaufgaben

Wir haben gesehen, dass an den Extrempunkten einer Funktion, also dort, wo die Funktion ein lokales Maximum oder Minimum hat, die Steigung der Tangente und damit die erste Ableitung der Funktion null sind. Dies kann man verwenden, um zu berechnen, wie eine Größe gewählt werden muss, damit eine andere Größe ein Minimum oder ein Maximum annimmt. So eine Berechnung nennt man Extremwertaufgabe.

**Beispiel 3.12:** Ein Zaun soll ein rechteckiges Grundstück von  $400 \text{ m}^2$  Fläche abgrenzen. Welche Maße muss das Grundstück haben, damit der Zaun möglichst kurz wird?

Wir bezeichnen die Länge des Grundstücks mit  $a$ , seine Breite mit  $b$ , seine Fläche mit  $A$  und seinen Umfang mit  $U$ . Es geht nun darum, Länge und Breite so zu wählen, dass bei gegebener Fläche der Umfang minimal wird. Dazu muss man entweder die passende Länge oder die passende Breite bestimmen; die jeweils andere Größe ergibt sich daraus, weil ja die Fläche feststeht. Entscheiden wir uns dafür,  $a$  zu bestimmen.

Nun müssen wir die zu minimierende Größe  $U$  als Funktion der zu bestimmenden Größe  $a$  ausdrücken. In einem Rechteck gilt:

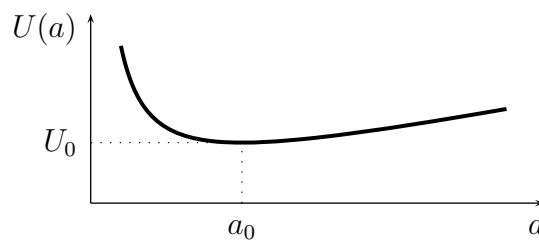
$$\begin{aligned} U &= 2(a + b), \\ A &= ab. \end{aligned}$$

Aus der zweiten Beziehung, die eine Nebenbedingung darstellt, können wir  $b$  ausdrücken:

$$b = \frac{A}{a}.$$

Setzen wir dies in die erste Beziehung ein, so erhalten wir  $U$  als Funktion von  $a$  allein, weil ja  $A$  eine Konstante ist:

$$U(a) = 2 \left( a + \frac{A}{a} \right).$$



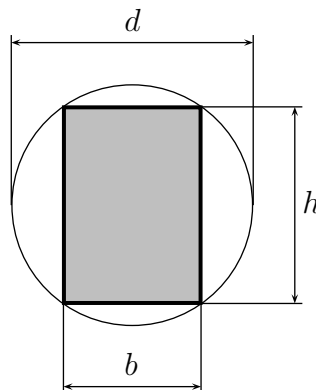
An ihrem Minimum bei  $a_0$  hat die Funktion  $U(a)$  eine horizontale Tangente, also ist  $U'(a_0) = 0$ ; der gesuchte Wert von  $a$  ergibt sich also aus der Bedingung  $U'(a) = 0$ :

$$\begin{aligned} U'(a) &= 2 \left( 1 - \frac{A}{a^2} \right) = 0, \\ a &= \sqrt{A} = 20 \text{ m}. \end{aligned}$$

Da  $U''(a) = 4A/a^3 > 0$ , ist der Graph von  $U(a)$  stets aufwärts gekrümmt und die gefundene Stelle tatsächlich ein Minimum. Nun ist  $b = \sqrt{A} = 20 \text{ m}$ ; das gesuchte Rechteck ist also ein Quadrat mit  $20 \text{ m}$  Seitenlänge.

□

**Beispiel 3.13:** Aus einem Baumstamm mit kreisförmigem Querschnitt von gegebenem Durchmesser soll ein rechteckiger Balken maximaler Tragfähigkeit geschnitten werden. Welche Maße muss er haben?



Die Tragfähigkeit ist bestimmt durch das Widerstandsmoment

$$W = \frac{bh^2}{6}.$$

Diese Größe soll also maximal werden. Der Durchmesser des Baumstammes ist zugleich Diagonale des Balkenquerschnitts; daraus folgt nach dem Satz von Pythagoras:

$$d^2 = b^2 + h^2.$$

Aus dieser Nebenbedingung drücken wir  $h^2$  aus und setzen den Ausdruck in die Formel für  $W$  ein. Wir erhalten  $W$  als Funktion von  $b$ :

$$W(b) = \frac{b(d^2 - b^2)}{6} = \frac{bd^2 - b^3}{6}.$$

Nun suchen wir die Extrempunkte von  $W$ :

$$W'(b) = \frac{d^2 - 3b^2}{6} = 0 \longrightarrow b = \frac{d}{\sqrt{3}}.$$

Für dieses  $b$  gilt:

$$W''(b) = -b < 0;$$

folglich ist dort der Graph von  $W$  abwärts gekrümmt und  $W$  nimmt ein Maximum an. Die zweite Abmessung des Rechtecks ergibt sich aus der Nebenbedingung:

$$h = \sqrt{d^2 - b^2} = d\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

□

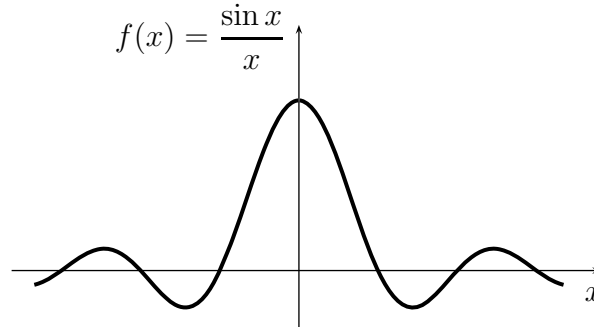
Die Methode liefert nur solche Extrempunkte, an denen die erste Ableitung null ist, also lokale. Um ein *globales* Maximum oder Minimum zu finden, also jene Stelle, an der die Funktion den größten oder kleinsten Wert überhaupt annimmt, muss man die Funktionswerte an den Randstellen des Definitionsbereiches einbeziehen. Zum Beispiel hat die Funktion  $x^3 - 3x^2 + 4$  ein lokales Maximum bei  $x = 0$ ; kann aber  $x$  von 0 bis 5 variieren, so finden wir den höchsten Funktionswert und damit das globale Maximum bei  $x = 5$ .

### 3.6.4 Die Regel von de l'Hospital für unbestimmte Ausdrücke

Die Funktion

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

ist für  $x = 0$  nicht definiert, da hier der Zähler null wäre. Andererseits zeigt der Graph der Funktion, dass man ihr auch bei  $x = 0$  einen Wert zuschreiben könnte:



Graph der Funktion  $\frac{\sin x}{x}$ . An der Stelle  $x = 0$  ist die Funktion nicht definiert.

Wir können also definieren:  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ , falls sich dieser Grenzwert berechnen lässt. Er hat jedoch die Form  $\frac{0}{0}$ , und so ein Ausdruck hat keinen Wert; er ist unbestimmt.

Unbestimmte Ausdrücke sind:  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $0^0$ ,  $\infty^0$ ,  $1^\infty$ ,  $\infty - \infty$ .

Berechnen können wir manche von ihnen mit der folgenden Regel von de l'Hospital:

Sind  $f$  und  $g$  in einer Umgebung von  $x_0$  differenzierbar und ist  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  von der Form  $\frac{0}{0}$

oder  $\frac{\infty}{\infty}$ , dann gilt:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , falls der letzte Grenzwert existiert.

**Beispiel 3.14:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$

□

**Beispiel 3.15:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0.$

□

**Beispiel 3.16:**  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x.$

Dieser Ausdruck hat die Form  $0 \cdot \infty$ . Im ersten Schritt schreiben wir ihn so, dass die Regel von de l'Hospital anwendbar wird, dann wenden wir die Regel an:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0.$$

□

**Beispiel 3.17:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$ .

Hier wenden wir die Regel zweimal an, da nach dem ersten Anwenden wieder ein unbestimmter Ausdruck vorliegt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

□

**Beispiel 3.18:**  $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$ .

Dies ist ein Ausdruck vom Typ  $0^0$ . Wir bringen ihn in eine geeignete Form:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} (e^{\ln x})^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln x}.$$

Da  $e^x$  stetig ist, dürfen wir Funktion und Grenzwert vertauschen:

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x)} = e^0 = 1.$$

(Den Grenzwert von  $x \ln x$  kennen wir aus Beispiel 3.16.)

□

## 8 SACHREGISTER

### A

Ableitung 16–20, 61  
 – der Arcusfunktionen 20  
 – der Umkehrfunktion 19  
 –, implizite 19  
 –, Laplace-Transformation 61  
 – von Funktionen in Parameterdarstellung 20  
 absolut konvergente Reihe 50, 56  
 algebraische Gleichung 9–15, 79  
 allgemeine Lösung 64, 67–68, 71, 73  
 Anfangsbedingung 74–78, 80  
 Anfangswert 65, 79  
 Anfangswertaufgabe 65, 69, 79  
 Arcusfunktionen 15, 20  
 –, Ableitung 20  
 Argument einer komplexen Zahl 4, 6  
 Ausdruck, unbestimmter 30–31

### B

bestimmtes Integral 32–33, 37, 42–44  
 Betrag einer komplexen Zahl 4, 6  
 Bildbereich 59, 79  
 Bildfunktion 59–61  
 Bogenlänge 46

### C

charakteristische Gleichung 72–75  
 Cosinus  
 – einer komplexen Zahl 6, 8  
 – hyperbolicus 15  
 Cosinusfunktion 17, 34, 56–57

### D

Deltafunktion 61  
 Differentialgleichung 62–80  
 –, allgemeine Lösung 64, 67–68, 71, 73  
 –, Anfangsbedingung 74–78, 80  
 –, Anfangswert 65, 79  
 –, Anfangswertaufgabe 65, 69, 79  
 –, charakteristische Gleichung 72–75  
 – erster Ordnung 64–71  
 –, gewöhnliche 62  
 –, homogene 67–77  
 –, inhomogene 67–73, 77–78  
 –, lineare 62, 67–80  
 – mit konstanten Koeffizienten 70–80  
 –, nichtlineare 62, 80  
 –, Normalansatz 70, 72–73, 77–78  
 –, Ordnung 62, 65  
 –, partielle 62

–, partikuläre Lösung 67–73, 77  
 –, Resonanz 72, 78  
 –, spezielle Lösung 67–73, 77  
 –, Störfunktion 67, 70–73  
 –, Trennen der Variablen 64–70  
 –, Variation der Konstanten 67–69, 72  
 – zweiter Ordnung 72–78, 80  
 Differentialquotient 17, 63  
 Differentialrechnung 16–31  
 –, Grenzwert 17  
 –, Kettenregel 18–19, 37–38  
 –, Potenzregel 18  
 –, Produktregel 18, 38  
 –, Quotientenregel 18  
 Dirac-Funktion 61  
 Distribution 61  
 divergente Reihe 47–51, 53–54  
 divergentes Integral 43–44  
 Drehkörper 46

### E

Ebene, komplexe 4, 7–8  
 eigentliches Integral 42  
 Einheitssprungfunktion 59, 61  
 erzwungene Schwingung 77–78, 80  
 eulersche Identität 4, 6, 56  
 Exponentialfunktion 6, 17, 34, 52–53, 55–56  
 Exponentialgleichung 11–12, 15  
 exponentielles Wachstum 63, 65–66, 69, 71, 79  
 Extrempunkt 16, 23–24, 27–29  
 Extremwertaufgabe 28–29

### F

Fläche unter dem Graphen 32–33  
 Folge  
 –, unendliche 47  
 – von Partialsummen 47–48  
 – von Teilsummen 47–48  
 Fourier-Koeffizienten 57  
 Fourier-Reihe 57–58  
 freie Schwingung 74, 80  
 Funktion  
 –, Cosinusfunktion 17, 34, 56–57  
 –, Exponentialfunktion 17, 34, 52–53, 55–56  
 –, Extrempunkt 16, 23–24, 27–29  
 –, Fläche unter dem Graphen 32–33  
 –, gerade 23  
 –, globales  
 –, – Maximum 29  
 –, – Minimum 29  
 –, Hochpunkt 16, 23–25, 28–29  
 –, Horizontalwendepunkt 23, 27

- , komplexe 6
- , konstante 17, 34
- , Krümmung 18, 23–24, 26
- , Logarithmusfunktion 17, 54
- , lokales
  - , – Maximum 16, 23–25, 28–29
  - , – Minimum 16, 23–25, 27–29
- , Maximum
- , –, globales 29
- , –, lokales 16, 23–25, 28–29
- , Minimum
- , –, globales 29
- , –, lokales 16, 23–25, 27–29
- , Monotonie 23–24, 26
- , nicht integrierbare 33
- , nirgends differenzierbare 18
- , Nullstelle 21–24
- , Periode 57
- , periodische 57
- , Polynomfunktion 23, 26
- , Potenzfunktion 17, 34
- , reelle 16
- , Sattelpunkt 23, 27
- , Sinusfunktion 17, 34, 56–57
- , Steigung der Tangente 16, 18, 23, 28
- , streng monoton
  - , – fallende 26
  - , – steigende 26
- , Symmetrie 23
- , Tangensfunktion 17, 34
- , Tangente 16, 23
- , Terrassenpunkt 23, 27
- , Tiefpunkt 16, 23–25, 27–29
- , Treppenpunkt 23, 27
- , Umkehrfunktion 19
- , ungerade 23
- , Wendepunkt 16, 23–27
- , Wendetangente 23–25
- Funktionenreihe 47–48, 51, 57
- Funktionsuntersuchung 23–27

## G

- gaußsche Zahlenebene 4, 7–8
- gedämpfte Schwingung 75–76, 80
- geometrische Reihe 48
- gerade Funktion 23
- gewöhnliche Differentialgleichung 62
- Gleichung 9–15
  - , algebraische 9–15, 79
  - , Differentialgleichung  $\rightarrow$  Differentialgleichung
  - , Exponentialgleichung 11–12, 15
  - , goniometrische 14–15

- höheren Grades 10
- , lineare 9–10
- , logarithmische 12–14
- mit Hyperbelfunktionen 15
- , nichtalgebraische 9–10
- , quadratische 7, 9–10
- , transzendente 9–10
- , trigonometrische 14–15
- , Wurzelgleichung 10–11
- globales
  - Maximum 29
  - Minimum 29
- goniometrische Gleichung 14–15
- Grad eines Polynoms 9
- Grenzwert
  - einer Reihe 47–48, 50
  - in der Differentialrechnung 17
  - in der Integralrechnung 33

## H

- harmonische
  - Reihe 49–50, 54
  - Schwingung 74–75
- Heaviside-Funktion 59, 61
- Hochpunkt 16, 23–25, 28–29
- homogene Differentialgleichung 67–77
- Horizontalwendepunkt 23, 27
- de l'Hospital, Regel von 30–31
- Hyperbelfunktion 15

## I

- Identität, eulersche 4, 6, 56
- imaginäre Zahlen 3
- Imaginärteil 3–5
- implizite Ableitung 19
- inhomogene Differentialgleichung 67–73, 77–78
- Integral 32–46, 59, 61
  - , bestimmtes 32–33, 37, 42–44
  - , divergentes 43–44
  - , eigentliches 42
  - , konvergentes 43, 59
  - , Laplace-Transformation 61
  - , Stammfunktion 32–34, 36–37, 44
  - , unbestimmtes 33, 35, 37
  - , uneigentliches 42–44
- Integralrechnung 32–46
  - , Grenzwert 33
  - , numerisches Integrieren 44–45
  - , Partialbruchzerlegung 40–42
  - , partielles Integrieren 38–39
  - , Rechtecknäherung 44–45
  - , Simpson-Formel 45

–, Substitution 35–38  
 –, Treppenfunktion 44–45  
 Integrand 35  
 inverse Laplace-Transformation 59

## K

kartesische Koordinaten 4  
 Kettenregel 18–19, 37–38  
 komplexe Ebene 4, 7–8  
 komplexe Funktion 6  
 komplexe Zahlen 3–8  
 –, Argument 4, 6  
 –, Betrag 4, 6  
 –, Cosinus 6, 8  
 –, Exponentialfunktion 6  
 –, Imaginärteil 3–5  
 –, konjugiert komplexe Zahlen 3, 5, 7  
 –, Logarithmus 6, 8  
 –, Potenz 5  
 –, Realteil 3–5  
 –, Sinus 6, 8  
 –, Tangens 6  
 –, Winkel 4, 6  
 –, Winkelfunktionen 6, 8  
 –, Wurzel 5, 7  
 konjugiert komplexe Zahlen 3, 5, 7  
 konstante Funktion 17, 34  
 konvergente Reihe 47–51, 53–54  
 konvergentes Integral 43, 59  
 Konvergenzbereich 51, 53–54  
 Konvergenzkriterien 49  
 Konvergenzradius 51, 53–54  
 Koordinaten  
 –, kartesische 4  
 –, Polarkoordinaten 4  
 Kosinus  $\rightarrow$  Cosinus  
 Krümmung 18, 23–24, 26  
 Kurvendiskussion  $\rightarrow$  Funktionsuntersuchung

## L

Laplace-Transformation 59–61, 79, 80  
 –, Bildbereich 59, 79  
 –, Bildfunktion 59–61  
 –, Deltafunktion 61  
 – der Ableitung 61  
 – des Integrals 61  
 –, Dirac-Funktion 61  
 –, Einheitssprungfunktion 59, 61  
 –, Heaviside-Funktion 59, 61  
 –, inverse 59  
 –, Laplace-Transformierte 59, 79, 80  
 –, Originalbereich 59, 79

–, Originalfunktion 59–60  
 Laplace-Transformierte 59, 79, 80  
 Leibniz-Kriterium 49–50, 54  
 lineare Differentialgleichung 62, 67–80  
 lineare Gleichung 9–10  
 Linearfaktor 3, 24, 40–41  
 logarithmische Gleichung 12–14  
 Logarithmus einer komplexen Zahl 6, 8  
 Logarithmusfunktion 17, 54  
 logistisches Wachstum 66, 80  
 lokales  
 – Maximum 16, 23–25, 28–29  
 – Minimum 16, 23–25, 27–29

## M

Majorantenkriterium 49  
 Maximum  
 –, globales 29  
 –, lokales 16, 23–25, 28–29  
 McLaurin-Reihe 52–53, 55–56  
 Minimum  
 –, globales 29  
 –, lokales 16, 23–25, 27–29  
 Minorantenkriterium 49  
 Monotonie 23–24, 26

## N

newtonsches Nullstellenverfahren 21–22, 24  
 nichtalgebraische Gleichung 9–10  
 nicht integrierbare Funktion 33  
 nichtlineare Differentialgleichung 62, 80  
 nirgends differenzierbare Funktion 18  
 Normalansatz 70, 72–73, 77–78  
 Nullfolgenkriterium 49–50  
 Nullstelle  
 – einer Funktion 21–24  
 – eines Polynoms 3, 7, 40–41  
 Nullstellenverfahren, newtonsches 21–22, 24  
 numerisches Integrieren 44–45

## O

Ordnung einer Differentialgleichung 62, 65  
 Originalbereich 59, 79  
 Originalfunktion 59–60

## P

Partialbruch 40–41, 66, 79  
 Partialbruchzerlegung 40–42, 66, 79  
 Partialsumme 47–48, 55, 58  
 partielle Differentialgleichung 62  
 partielles Integrieren 38–39  
 partikuläre Lösung 67–73, 77

Periode 57  
 periodische Funktion 57  
 Polarkoordinaten 4  
 Polynom  
 –, Grad 9  
 –, Linearfaktor 3, 24, 40–41  
 –, Nullstelle 3, 7, 40–41  
 Polynomfunktion 23, 26  
 Potenz einer komplexen Zahl 5  
 Potenzfunktion 17, 34  
 Potenzregel 18  
 Potenzreihe 50–56  
 Produktregel 18, 38

## Q

quadratische Gleichung 7, 9–10  
 Quotientenkriterium 49, 51, 53–54  
 Quotientenregel 18

## R

Realteil 3–5  
 Rechtecknäherung 44–45  
 reelle  
 – Funktion 16  
 – Zahlen 3  
 Regel von de l'Hospital 30–31  
 Reihe 47–58  
 –, absolut konvergente 50, 56  
 – der Cosinusfunktion 56  
 – der Exponentialfunktion 52–53, 55–56  
 – der Logarithmusfunktion 54  
 – der Sinusfunktion 56  
 –, divergente 47–51, 53–54  
 –, Fourier-Koeffizienten 57  
 –, Fourier-Reihe 57–58  
 –, Funktionenreihe 47–48, 51, 57  
 –, geometrische 48  
 –, Grenzwert 47–48, 50  
 –, harmonische 49–50, 54  
 –, konvergente 47–51, 53–54  
 –, Konvergenzbereich 51, 53–54  
 –, Konvergenzkriterien 49  
 –, Konvergenzradius 51, 53–54  
 –, Leibniz-Kriterium 49–50, 54  
 –, Majorantenkriterium 49  
 –, McLaurin-Reihe 52–53, 55–56  
 –, Minorantenkriterium 49  
 – mit konstanten Gliedern 47  
 –, Nullfolgenkriterium 49–50  
 –, Partialsumme 47–48, 55, 58  
 –, Potenzreihe 50–56  
 –, Quotientenkriterium 49, 51, 53–54

–, Taylor-Reihe 52–56  
 –, Teilsumme 47–48, 55, 58  
 –, unendliche 47–58  
 –, Wurzelkriterium 49, 51, 53  
 Resonanz 72, 78

## S

Sattelpunkt 23, 27  
 Schwingung 72–78, 80  
 –, erzwungene 77–78, 80  
 –, freie 74, 80  
 –, gedämpfte 75–76, 80  
 –, harmonische 74–75  
 –, Resonanz 72, 78  
 Simpson-Formel 45  
 Sinus  
 – einer komplexen Zahl 6, 8  
 – hyperbolicus 15  
 Sinusfunktion 17, 34, 56–57  
 spezielle Lösung 67–73, 77  
 Stammfunktion 32–34, 36–37, 44  
 Steigung der Tangente 16, 18, 23, 28  
 Störfunktion 67, 70–73  
 streng monoton  
 – fallende Funktion 26  
 – steigende Funktion 26  
 Substitution 35–38  
 Symmetrie 23

## T

Tangens  
 – einer komplexen Zahl 6  
 – hyperbolicus 15  
 Tangensfunktion 17, 34  
 Tangente  
 – an einen Funktionsgraphen 16, 23  
 –, Steigung 16, 18, 23, 28  
 Taylor-Reihe 52–56  
 Teilsumme 47–48, 55, 58  
 Terrassenpunkt 23, 27  
 Tiefpunkt 16, 23–25, 27–29  
 transzendente Gleichung 9–10  
 Trennen der Variablen 64–70  
 Treppenfunktion 44–45  
 Treppenkriterium 23, 27  
 trigonometrische Gleichung 14–15

## U

Umkehrfunktion 19  
 unbestimmter Ausdruck 30–31  
 unbestimmtes Integral 33, 35, 37  
 uneigentliches Integral 42–44



unendliche  
– Folge 47  
– Reihe 47–58  
ungerade Funktion 23

## V

Variation der Konstanten 67–69, 72  
Volumen eines Drehkörpers 46

## W

Wachstum  
–, exponentielles 63, 65–66, 69, 71, 79  
–, logistisches 66, 80  
Wendepunkt 16, 23–27  
Wendetangente 23–25  
Winkel einer komplexen Zahl 4, 6  
Winkelfunktion 14–15  
Winkelfunktionen einer komplexen Zahl 6, 8  
Wurzel einer komplexen Zahl 5, 7  
Wurzelgleichung 10–11  
Wurzelkriterium 49, 51, 53

## Z

Zahlen  
–, imaginäre 3  
–, komplexe 3–8  
–, konjugiert komplexe 3, 5, 7  
–, reelle 3  
Zahlenebene, gaußsche 4, 7–8